

## МАКСИМАЛЬНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ЗНАЧЕНИЯ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ В ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Пацюк В.И., Берзан В.П., Анисимов В.К., Кабак С.С., Посторонка С.А.

*Институт Энергетики АН Молдовы*

**Аннотация.** Рассмотрена проблема определения максимальных значений тока и напряжения в длинной линии при описании стационарных процессов в зависимости от длины линии и ее нагрузки. Длина линии изменяется от нуля до ее волновой длины, а диапазон изменения нагрузки от режима короткого замыкания до режима холостого хода. В качестве метода исследования использован метод комплексных амплитуд (МКА). Рассмотрены режимы в идеальной линии и линии без искажения сигнала и для этих типов цепей получены точные аналитические решения. Выполнены расчеты для линии с произвольными потерями. Установлено, что для идеальной линии и неискажающей линии установившиеся максимальные значения токов и напряжений достигаются всегда для вырожденных режимов, т.е. при КЗ либо ХХ. Для случая линий с произвольными потерями наблюдаются локальные максимумы для тока и напряжения при изменении нагрузки от режима короткого замыкания до режима холостого хода, а физической длины линии от нуля до ее волновой длины. Введение безразмерного параметра нагрузки  $z = (R_s - Z_B) / (R_s + Z_B)$ , который принимает значение  $z = -1$  при коротком замыкании и  $z = 1$  при холостом ходе позволил получить обобщенные зависимости изменения исследуемых параметров для любой волновой длины линии и диапазона изменения ее нагрузки в виде графиков.

**Ключевые слова:** Линия электропередачи идеальная, метод комплексных амплитуд, максимальное значение напряжения или тока.

## VALORILE STAȚIONARE MAXIMALE ALE CURENTULUI ȘI TENSIUNII ÎN LINIA OMOGENĂ DE CURENT ALTERNATIV

Pațiuț V.I., Berzan V.P., Anisimov V.C., Cabac C.C., Postoronica S.A.

*Institutul de Energetică al AȘM*

**Rezumat.** În lucrare se examinează problema determinării valorilor maxime ale curentului și tensiunilor în regim staționar al liniei lungi în funcție de lungimea de undă și la varierea sarcinii de la regimul de scurtcircuit până la regimul de mers în gol. Ca metodă de analiză s-a utilizat metoda amplitudinilor complexe (MAC). S-au examinat regimurile în linia ideală și în linia fără deformarea semnalelor și pentru aceste circuite au fost obținute soluții analitice precise. S-au executat de asemenea calcule ale valorilor mărimilor studiate (curentului și tensiunii) pentru linia lungă cu pierderi arbitrare. S-a constatat, că în cazul liniei ideale și a liniei cu pierderi dar fără deformarea semnalului valorile maxime ale curentului și tensiunii în regim staționar sunt caracteristice pentru regimurile degradate, deci pentru regimul de scurtcircuit (SC) și regimul de mers în gol (MG). Pentru linia cu pierderi arbitrare s-au depistat zone locale de amplasare a valorilor maxime ale curentului la varierea lungimii liniei și a sarcinii. Introducerea pentru descrierea sarcinii a parametrului adimensional  $z = (R_s - Z_B) / (R_s + Z_B)$ , care se schimbă de la  $z = -1$  pentru regimul de SC până la valoarea  $z = 1$  în cazul regimului MG, a permis obținerea unor informații generalizate privind evoluțiile valorilor mărimilor studiate pentru orice valoare a lungimii liniei și sarcinii în formă grafică.

**Cuvinte-cheie:** Linie ideală de transmisie, metoda amplitudinilor complexe.

## MAXIMUM STEADY VOLTAGE AND CURRENT IN A HOMOGENEOUS ALTERNATING CURRENT LINE

Patiuk V.I., Berzan V.P., Anisimov V.K., Kabak S.S., Postoronica S.A.

*Institute of Power Engineering of the ASM*

**Abstract.** The paper considers the problem of determining of maximum values of voltage and current in a long line. The processes have been analyzed at stationary processes, depending on the length of the line and its load. Line length has been varied from zero to its wave length. Range of the load value has been changed from short-circuit mode to idle mode. The method of complex amplitudes has been used for this research. Modes have been considered for the ideal line without distortion. Exact analytical solutions have been obtained for these types of circuits. Calculations have been made for lines with arbitrary losses. It has been found that for the ideal line and

undistorted lines the set of the maximum voltage and current could be always achieved for degenerated modes. It has been observed that for the case of lines with arbitrary losses local maxima for current and voltage could take place (when the load on the mode of short-circuit current up to idle mode, and the physical length of the line from zero to its wave length). Introduction of dimensionless parameter of load, for short-circuit and no-load, made it possible to obtain generalized dependencies between changing of investigated parameters for any wave length of the line and the range of variation of its load.

**Keywords:** Ideal transmission line, arbitrary losses, method of complex amplitudes.

## 1. Введение

Обеспечение бесперебойного питания и качества электроэнергии, поставляемая потребителям является актуальной проблемой, которая обусловлена внедрением новых технологий, в том числе и информационных во всех сферах деятельности и отраслях экономики. Даже краткосрочные перерывы в поставки электроэнергии имеют катастрофические последствия для экономики и социальной сферы.

Возрастание структурной сложности систем энергоснабжения, в том числе систем транспорта и распределения, обуславливают и усложнение проблемы обеспечения надежности энергоснабжения и обеспечения качества поставляемой электроэнергии. Это приводит к постоянному появлению новых проблем и задач, которые необходимо решать на новом уровне их осознания и понимания. К числу таких задач для электротехники и электроэнергетики относится построение и обоснование физико-математических моделей для адекватного описания и расчета стационарных и нестационарных электромагнитных явлений в длинных линиях с распределенными и сосредоточенными элементами.

В линейных электрических цепях, к которым относятся и электрические сети, наиболее полное математическое описание нестационарных и стационарных процессов обеспечивают телеграфные уравнения. Они основаны на законы Г. Киргхофа в дифференциальной форме и являются следствием уравнений Д. Максвелла в одномерной постановке [1–11].

Научное направление в теоретической электротехнике под общим названием: «Нестационарные явления в электрических цепях с распределенными и сосредоточенными постоянными» сформулировал академик К.А. Круг в своем фундаментальном труде [12] и обозначил как самое сложное, но вместе с тем и как самое перспективное научное исследовательское направление. Отметим, что и по сей день задачи расчета электрических цепей подразделяются на задачи расчета стационарных и переходных режимов, хотя в реальных устройствах стационарные и нестационарные процессы трудно разделить. Даже для случая стационарного режима появляется множество частных решений, которые сложно представить в обобщенной форме.

Следует отметить и новые вызовы для электроэнергетики, как перспектива создания общепланетарной электроэнергетической системы [13], что однозначно обуславливает новые качественные изменения в энергообеспечение, например, расширение возможностей эффективного использования ВИЭ, а также и новые проблемы по передачи энергии на большие расстояния.

В качестве одной из таких проблем рассмотрим особенности распределения установившихся значений токов и напряжений в длинной линии в зависимости от ее длины  $l$  и сопротивления нагрузки на конце линии  $z$ .

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения максимальных установившихся значений токов и напряжений в длинной однородной линии с распределенными параметрами в зависимости от значения активной нагрузки  $R_s$  на правом конце линии и ее длины  $l$ . Левый конец линии (начало) подключен к генератору переменного тока частотой  $f$ . Полагаем, что токи и напряжения в линии удовлетворяют телеграфным уравнениям

$$L \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + Ri = 0; \quad C \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} + Gu = 0, \quad (1)$$

для которых, выполняются граничные условия:

$$u(0, t) = U_0 \exp(j\omega t); \quad u(l, t) = R_s i(l, t) \quad (2)$$

## 3. Метод решения

В установившемся режиме решение для комплексов токов  $I(x)$  и напряжений  $U(x)$  линии можно получить по методу комплексных амплитуд (МКА).

$$I(x) = \frac{U_0}{Z_0} \cdot \frac{R_s \operatorname{sh} \delta(l-x) + Z_0 \operatorname{ch} \delta(l-x)}{R_s \operatorname{ch} \delta l + Z_0 \operatorname{sh} \delta l}; \quad (3)$$

$$U(x) = U_0 \frac{R_s \operatorname{ch} \delta(l-x) + Z_0 \operatorname{sh} \delta(l-x)}{R_s \operatorname{ch} \delta l + Z_0 \operatorname{sh} \delta l},$$

где  $Z_0$  – комплексное волновое (характеристическое) сопротивление;  $\delta$  – коэффициент распространения;  $\delta = \alpha + j\beta$ ;  $\alpha, \beta$  – коэффициенты затухания и фазы.

Квадрат модуля комплекса тока определяем из выражения

$$|I(x)|^2 = I(x)I^*(x) = \frac{U_0^2}{|Z_0|^2} \left| \frac{\operatorname{sh} \delta(l-x)}{\operatorname{ch} \delta l} \right|^2 \cdot \left\{ R_s^2 + 2R_s \operatorname{Re} [Z_0 \operatorname{cth} \delta(l-x)] + \right. \quad (4)$$

$$\left. + |Z_0 \operatorname{cth} \delta(l-x)|^2 \right\} \cdot \left\{ R_s^2 + 2R_s \operatorname{Re} [Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] + |Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 \right\}^{-1}.$$

Максимальные значения  $|I(x)|^2$  как функции от переменной  $R_s$  могут быть определены путем исследования поведения производной  $d|I(x)|^2 / dR_s$ , знак которой определяется значением квадратного трехчлена следующего вида:

$$\frac{d|I(x)|^2}{dR_s} = K \left\{ R_s^2 (\operatorname{Re} [Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] - \operatorname{Re} [Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))]) + R_s (|Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 - |Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2) + \right.$$

$$\left. + |Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 \operatorname{Re} [Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))] - |Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2 \operatorname{Re} [Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] \right\} = K \{ aR_s^2 + bR_s + c \};$$

$$a = \operatorname{Re} [Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] - \operatorname{Re} [Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))]; \quad b = |Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 - |Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2;$$

$$c = |Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 \operatorname{Re} [Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))] - |Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2 \operatorname{Re} [Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]; \quad (5)$$

$$K = \frac{2U_0^2}{|Z_0|^2} \left| \frac{\operatorname{sh}\delta(l-x)}{\operatorname{ch}\delta l} \right|^2 \cdot \left\{ R_s^2 + 2R_s \operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] + |Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 \right\}^{-2} > 0.$$

Отметим, что неравенства  $a < 0$ ,  $b < 0$  и  $c < 0$  имеют соответствующие эквивалентные соотношения

$$a < 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))]} < 1; \quad b < 0 \Leftrightarrow \frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2} < 1;$$

$$c < 0 \Leftrightarrow \frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2} < \frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))]} \quad (6)$$

#### 4. Определение максимальных значений тока линии в установившемся режиме

##### 4.1. Линия без потерь

Рассмотрим вначале случай идеальной линии:  $R = G = 0$ ;  $\beta = j\omega/a$ ;  $a = 1/\sqrt{LC}$ ;  $Z_0 = Z_B = \sqrt{L/C}$ . При этих условиях в соотношениях (5) нулевые значения будут иметь следующие составляющие

$$\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] = Z_B \operatorname{Re}[j \operatorname{tg}(\omega\Delta)] = 0;$$

$$\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))] = Z_B \operatorname{Re}[j \operatorname{ctg}(\omega(\Delta - \Delta_x))] = 0 \Rightarrow a = c = 0,$$

а производная  $d|I(x)|^2 / dR_s$  принимает вид линейной функции по сопротивлению нагрузки  $R_s$

$$\frac{d|I(x)|^2}{dR_s} = KR_s Z_B \left( |\operatorname{tg}(\omega\Delta)|^2 - |\operatorname{ctg}(\omega(\Delta - \Delta_x))|^2 \right). \quad (7)$$

В формуле (7) через  $\Delta$ ,  $\Delta_x$  обозначено соответственно время пробега электромагнитной волны по длине линии  $l$  и по отрезку  $[0, x]$ .

Так как  $R_s \in [0, \infty)$  и производная является линейной функцией, то получаем, что  $|I(x)|^2$  является монотонной функцией и максимальные значения модуля тока для идеальной линии достигаются на границах интервала  $[0, \infty)$  изменения независимой переменной, т.е. при  $R_s = 0$ , когда имеем режим короткого замыкания линии (КЗ) или при  $R_s = \infty$ , т.е. в случае холостого хода линии (ХХ).

##### 4.2. Неискажающая линия с потерями

Рассмотрим неискажающую линию с потерями энергии:  $R/L = G/C = \gamma$ ;  $\delta = (\gamma + j\omega)/a$ ;  $a = 1/\sqrt{LC}$ ;  $Z_0 = Z_B = \sqrt{L/C}$ . Для принятых условий будут действительны следующие соотношения:

$$\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] = Z_B \frac{\operatorname{sh}(2\gamma\Delta)}{\operatorname{ch}(2\gamma\Delta) + \cos(2\omega\Delta)}; \quad |Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 = Z_B^2 \frac{\operatorname{ch}(2\gamma\Delta) - \cos(2\omega\Delta)}{\operatorname{ch}(2\gamma\Delta) + \cos(2\omega\Delta)};$$

$$\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))] = Z_B \frac{\operatorname{sh}(2\gamma(\Delta - \Delta_x))}{\operatorname{ch}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) - \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x))};$$

$$|Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2 = Z_B^2 \frac{\operatorname{ch}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) + \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x))}{\operatorname{ch}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) - \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x))},$$

а формула (5) может быть представлена в виде

$$\frac{d|I(x)|^2}{dR_S} = K_1 \{ \tilde{a} Z_B R_S^2 + \tilde{b} Z_B^2 R_S + \tilde{c} Z_B^3 \}; \quad (8)$$

$$K_1 = K [\operatorname{ch}(2\gamma\Delta) + \cos(2\omega\Delta)]^{-1} [\operatorname{ch}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) - \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x))]^{-1} > 0;$$

$$\tilde{a} = \operatorname{sh}(2\gamma\Delta_x) - \operatorname{sh}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) \cos(2\omega\Delta) - \operatorname{sh}(2\gamma\Delta) \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x));$$

$$\tilde{b} = -2 [\operatorname{ch}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) \cos(2\omega\Delta) + \operatorname{ch}(2\gamma\Delta) \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x))];$$

$$\tilde{c} = -\operatorname{sh}(2\gamma\Delta_x) - \operatorname{sh}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) \cos(2\omega\Delta) - \operatorname{sh}(2\gamma\Delta) \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x)).$$

Отметим, что знаки коэффициентов  $a$  и  $\tilde{a}$ ,  $b$  и  $\tilde{b}$ ,  $c$  и  $\tilde{c}$  совпадают. Покажем, что квадратный трехчлен в (8) на интервале  $R_S \in [0, \infty)$  может принимать только положительные или отрицательные значения, либо имеет только один положительный корень в случае  $\tilde{a} > 0$ . Если дискриминант  $\tilde{d} = \tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c} < 0$ , то в зависимости от знака  $\tilde{a}$  (8) принимает только положительные или отрицательные значения. Если дискриминант неотрицателен, то уравнение  $\tilde{a} Z_B R_S^2 + \tilde{b} Z_B^2 R_S + \tilde{c} Z_B^3 = 0$  имеет вещественные корни.

Рассмотрим случай  $\tilde{a} < 0$  и  $a < 0$ . Тогда из (6) имеем  $\frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))]} < 1$ . Так как  $\tilde{c} = \tilde{a} - 2\operatorname{sh}(2\gamma\Delta_x)$ , то имеем  $\tilde{c} < 0$  и  $c < 0$ . Из уравнения (6) при выполнении указанных условий следует, что

$$\frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2} < \frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))]}.$$

Объединяя эти два неравенства, получаем  $\frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2} < 1$ , а значит

выполняется неравенство для коэффициентов  $\tilde{b} < 0$  и  $b < 0$ . Таким образом получаем, что если коэффициент  $a$  отрицателен, то и  $b$  и  $c$  отрицательны и оба корня квадратного уравнения отрицательны.

Предположим, что величина  $\tilde{c} > 0$ . При этом условии из соотношения  $\tilde{a} = \tilde{c} + 2\operatorname{sh}(2\gamma\Delta_x)$  следует, что величина  $\tilde{a} > 0$ . Для рассматриваемого варианта из уравнений системы (6) получаем

$$\frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))]} > 1; \quad \frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2} > \frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{cth}(\delta(l-x))]},$$

и поскольку при этих условиях  $\frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{cth}(\delta(l-x))|^2} > 1$ , то соответственно больше

нуля и величины  $b > 0$  и  $\tilde{b} > 0$ . Таким образом получаем, что если коэффициент  $c$  положителен, то  $a$  и  $b$  также положительны, а оба корня квадратного уравнения являются отрицательными.

Далее рассмотрим случай  $\tilde{a} > 0$  и  $\tilde{c} < 0$ . При этом условии квадратное уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень в независимости от знака коэффициента  $\tilde{b}$ .

Таким образом, показано, что квадратный трехчлен в формуле (8) на интервале  $R_s \in [0, \infty)$  может принимать только положительные или только отрицательные значения, либо имеет только один положительный корень в случае  $\tilde{a} > 0$ . В этих случаях модуль  $|I(x)|^2$  для любых значений  $x$  и  $l$  на интервале  $R_s \in [0, \infty)$  либо является монотонной функцией по  $R_s$ , либо немонотонной, но вогнутой функцией. Из этого следует, что, как и для идеальной линии, так и для неискажающей линии максимальные значения модуля тока возможны только на границах интервала  $[0, \infty)$  изменения независимой величины, т.е. при  $R_s = 0$ , когда реализуется короткое замыкание линии (КЗ) или при  $R_s = \infty$  в случае холостого хода линии (ХХ).

#### 4.3. Линия с произвольными потерями

Для линии с произвольными потерями ( $R/L \neq G/C$ ) изменение модуля  $|I(x)|^2$  как функция от  $R_s$  имеет более сложный характер, т.е. имеются локальные максимумы для значений  $0 < R_s < \infty$ . В силу этого не удастся доказать строго математически утверждение, полученное выше для идеальной и неискажающей линий. Однако имеются предпосылки утверждать, что аналогичное изменение модуля тока будет характерно и для линии с произвольными потерями (по крайней мере для диапазона значений параметров реальной длинной линии). Это суждение имеет в основе результаты расчетов длинной линии с потерями ( $R = 0.48$ ;  $G = R/7$ ), для которой получена картина линий уровня максимальных значений тока (рис. 1) в зависимости от безразмерного параметра нагрузки  $z = (R_s - Z_B) / (R_s + Z_B)$ . Безразмерный параметр  $z$  принимает значение  $z = -1$  при коротком замыкании и  $z = 1$  при холостом ходе. Из рисунка видно, что максимальные значения достигаются для различных длин линии  $l$  при  $z = \pm 1$ .

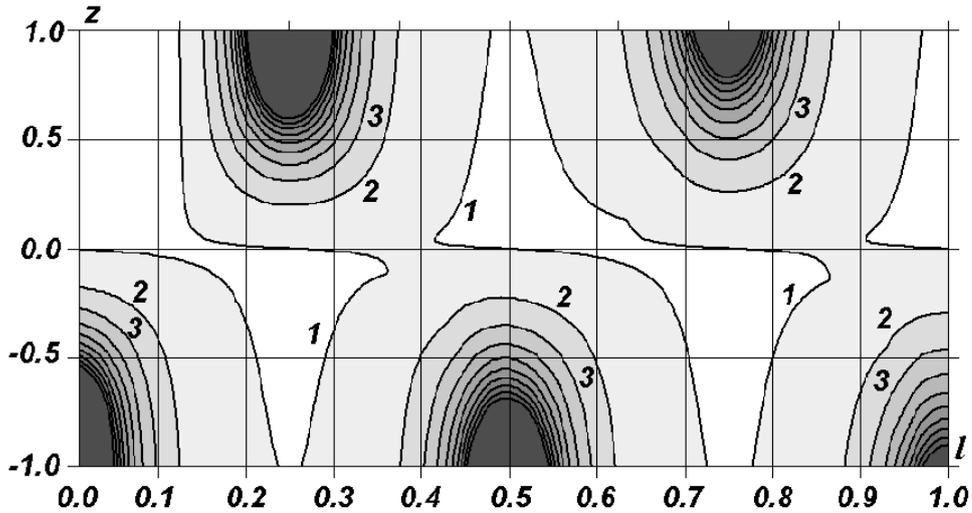


Рис. 1. Линии уровня  $\max_x |I(x)|^2$  для различных значений длины линии  $l$  и сопротивления нагрузки  $z$ .

## 5. Определение максимальных значений напряжения в линии в установившемся режиме

### 5.1. Основные расчетные соотношения

Рассмотрим задачу для модуля комплекса напряжения  $|U(x)|$ :

$$|U(x)|^2 = U(x)U^*(x) = U_0^2 \left| \frac{\text{ch}\delta(l-x)}{\text{ch}\delta l} \right|^2 \cdot \left\{ R_s^2 + 2R_s \text{Re}[Z_0 \text{th}\delta(l-x)] + |Z_0 \text{th}\delta(l-x)|^2 \right\} \cdot \left\{ R_s^2 + 2R_s \text{Re}[Z_0 \text{th}(\delta l)] + |Z_0 \text{th}\delta l|^2 \right\}^{-1}. \quad (9)$$

Максимальные значения  $|U(x)|^2$  по  $R_s$  могут быть определены путем исследования поведения производной  $d|U(x)|^2/dR_s$ , знак которой определяется квадратным трехчленом следующего вида:

$$\frac{d|U(x)|^2}{dR_s} = K \left\{ R_s^2 (\text{Re}[Z_0 \text{th}(\delta l)] - \text{Re}[Z_0 \text{th}(\delta(l-x))]) + R_s (|Z_0 \text{th}(\delta l)|^2 - |Z_0 \text{th}(\delta(l-x))|^2) + |Z_0 \text{th}(\delta l)|^2 \text{Re}[Z_0 \text{th}(\delta(l-x))] - |Z_0 \text{th}(\delta(l-x))|^2 \text{Re}[Z_0 \text{th}(\delta l)] \right\} = K \{ aR_s^2 + bR_s + c \}; \quad (10)$$

$$a = \operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] - \operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))]; \quad b = |Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 - |Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))|^2;$$

$$c = |Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 \operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))] - |Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))|^2 \operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)];$$

$$K = 2U_0^2 \left| \frac{\operatorname{ch}\delta(l-x)}{\operatorname{ch}\delta l} \right|^2 \cdot \left\{ R_s^2 + 2R_s \operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] + |Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 \right\}^{-2} > 0.$$

Как и в случае, исследования изменений максимального значения модуля тока в зависимости от сопротивления нагрузки линии отметим, эквивалентность следующих неравенств

$$a < 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))]} < 1; \quad b < 0 \Leftrightarrow \frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{th}(\delta(l-x))|^2} < 1;$$

$$c < 0 \Leftrightarrow \frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{th}(\delta(l-x))|^2} < \frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))]} \quad (11)$$

## 5.2. Линия без потерь

Рассмотрим вначале случай идеальной линии:  $R = G = 0$ ;  $\delta = (\gamma + j\omega) / a$ ;  $\delta = j\omega / a$ ;  $a = 1 / \sqrt{LC}$ ;  $Z_0 = Z_B = \sqrt{L/C}$ . При этих условиях в уравнении (10) имеем

$$\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] = Z_B \operatorname{Re}[j \operatorname{tg}(\omega \Delta)] = 0;$$

$$\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))] = Z_B \operatorname{Re}[j \operatorname{tg}(\omega(\Delta - \Delta_x))] = 0 \Rightarrow a = c = 0,$$

а производная  $d|U(x)|^2 / dR_s$  принимает вид линейной функции по сопротивлению нагрузки  $R_s$

$$\frac{d|U(x)|^2}{dR_s} = KR_s Z_B \left( |\operatorname{tg}(\omega \Delta)|^2 - |\operatorname{tg}(\omega(\Delta - \Delta_x))|^2 \right).$$

Так как  $R_s \in [0, \infty)$  и производная является линейной функцией, то получаем, что  $|U(x)|^2$  является монотонной функцией и максимальные значения модуля напряжения для идеальной линии принимаются на концах интервала  $[0, \infty)$  изменения независимой переменной, т.е. при  $R_s = 0$ , когда реализуется короткое замыкание линии (КЗ) или при  $R_s = \infty$  в случае холостого хода линии (ХХ).

### 5.3. Неискажающая линия с потерями

Рассмотрим случай неискажающей линии:  $R/L = G/C = \gamma$ ;  $\delta = (\gamma + j\omega)/a$ ;  $a = 1/\sqrt{LC}$ ;  $Z_0 = Z_B = \sqrt{L/C}$ . Для принятых условий следует, что

$$\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)] = Z_B \frac{\operatorname{sh}(2\gamma\Delta)}{\operatorname{ch}(2\gamma\Delta) + \cos(2\omega\Delta)}; \quad |Z_0 \operatorname{th}(\delta l)|^2 = Z_B^2 \frac{\operatorname{ch}(2\gamma\Delta) - \cos(2\omega\Delta)}{\operatorname{ch}(2\gamma\Delta) + \cos(2\omega\Delta)};$$

$$\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))] = Z_B \frac{\operatorname{sh}(2\gamma(\Delta - \Delta_x))}{\operatorname{ch}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) + \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x))};$$

$$|Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))|^2 = Z_B^2 \frac{\operatorname{ch}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) - \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x))}{\operatorname{ch}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) + \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x))}$$

и формула (10) может быть представлена в виде

$$\frac{d|U(x)|^2}{dR_s} = K_1 \{ \tilde{a} Z_B R_s^2 + \tilde{b} Z_B^2 R_s + \tilde{c} Z_B^3 \}; \quad (12)$$

$$K_1 = K [\operatorname{ch}(2\gamma\Delta) + \cos(2\omega\Delta)]^{-1} [\operatorname{ch}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) + \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x))]^{-1} > 0;$$

$$\tilde{a} = \operatorname{sh}(2\gamma\Delta_x) - \operatorname{sh}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) \cos(2\omega\Delta) + \operatorname{sh}(2\gamma\Delta) \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x));$$

$$\tilde{b} = 2 [\operatorname{ch}(2\gamma\Delta) \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x)) - \operatorname{ch}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) \cos(2\omega\Delta)];$$

$$\tilde{c} = -\operatorname{sh}(2\gamma\Delta_x) - \operatorname{sh}(2\gamma(\Delta - \Delta_x)) \cos(2\omega\Delta) + \operatorname{sh}(2\gamma\Delta) \cos(2\omega(\Delta - \Delta_x)).$$

Отметим, что знаки коэффициентов  $a$  и  $\tilde{a}$ ,  $b$  и  $\tilde{b}$ ,  $c$  и  $\tilde{c}$  совпадают. Покажем, что квадратный трехчлен в (12) на интервале  $R_s \in [0, \infty)$  может принимать только положительные или отрицательные значения, либо имеет только один положительный корень в случае  $\tilde{a} > 0$ .

Во-первых, если дискриминант  $\tilde{d} = \tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c} < 0$ , то в зависимости от знака  $\tilde{a}$  производная в (12) принимает только положительные или отрицательные значения. Если дискриминант неотрицателен, то уравнение  $\tilde{a} Z_B R_s^2 + \tilde{b} Z_B^2 R_s + \tilde{c} Z_B^3 = 0$  имеет вещественные корни.

Рассмотрим случай  $\tilde{a} < 0$  и  $a < 0$ . Тогда из формулы (11) имеем

$$\frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))]} < 1, \text{ а поскольку } \tilde{c} = \tilde{a} - 2\operatorname{sh}(2\gamma\Delta_x), \text{ то имеем } \tilde{c} < 0 \text{ и } c < 0.$$

Следовательно, можем на основе формулы (11) записать

$$\frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{th}(\delta(l-x))|^2} < \frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))]}.$$

Объединяя эти два неравенства, получаем  $\frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{th}(\delta(l-x))|^2} < 1$ , а значит  $\tilde{b} < 0$  и

$b < 0$ . Таким образом установили, что если коэффициент  $a$  отрицателен, то  $b$  и  $c$  также отрицательны и оба корня квадратного уравнения отрицательны. Далее пусть  $\tilde{c} > 0$ . Тогда из соотношения  $\tilde{a} = \tilde{c} + 2\operatorname{sh}(2\gamma\Delta_x)$  имеем  $\tilde{a} > 0$ , и с учетом (11) имеем неравенства

$$\frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))]} > 1; \quad \frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{th}(\delta(l-x))|^2} > \frac{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta l)]}{\operatorname{Re}[Z_0 \operatorname{th}(\delta(l-x))]}.$$

При выполнении указанных условий  $\frac{|\operatorname{th}(\delta l)|^2}{|\operatorname{th}(\delta(l-x))|^2} > 1$ , и как следствие  $b > 0$  и

$\tilde{b} > 0$ . Таким образом установили, что если коэффициент  $c$  положителен, то  $a$  и  $b$  также положительны, а оба корня квадратного уравнения отрицательны.

Рассмотрим случай  $\tilde{a} > 0$  и  $\tilde{c} < 0$ . При этих условиях квадратное уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень в независимости от знака коэффициента  $\tilde{b}$ .

Таким образом, показано, что квадратный трехчлен в формуле (12) на интервале  $R_s \in [0, \infty)$  может принимать только положительные или отрицательные значения, либо может иметь только один положительный корень в случае  $\tilde{a} > 0$ . Для рассмотренных случаев модуль  $|U(x)|^2$  для любых значений  $x$  и  $l$  на интервале  $R_s \in [0, \infty)$  является либо монотонной функцией по  $R_s$ , либо немонотонной, но вогнутой функцией. Из этого анализа следует, что, как и для идеальной линии, максимальные значения модуля напряжения для неискажающей линии возможен на границах интервала  $[0, \infty)$  изменения независимой переменной, т.е. при  $R_s = 0$ , когда реализуется короткое замыкание линии (КЗ) или при  $R_s = \infty$  в случае холостого хода линии (ХХ).

#### 5.4. Линия с произвольными потерями

В случае линии с произвольными потерями ( $R/L \neq G/C$ ) поведение модуля  $|U(x)|^2$  как функции от  $R_s$  имеет более сложный характер, т.е. имеются локальные максимумы для значений  $0 < R_s < \infty$ . В силу этого не удается строго доказать математически утверждение, сформулированное выше для идеальной и неискажающей линии. Однако оно остается верным и для линии с произвольными потерями, что подтверждается картиной линий уровня, приведенной на рис. 2, которая получена при  $R = 0.48$ ,  $G = R/7$ . Безразмерный параметр нагрузки  $z = (R_s - Z_B)/(R_s + Z_B)$ , который принимает значение  $z = -1$  при коротком замыкании и  $z = 1$  при холостом ходе. Из рисунка видно, что максимальные значения достигаются для различных длин линии  $l$  при  $z = \pm 1$ .

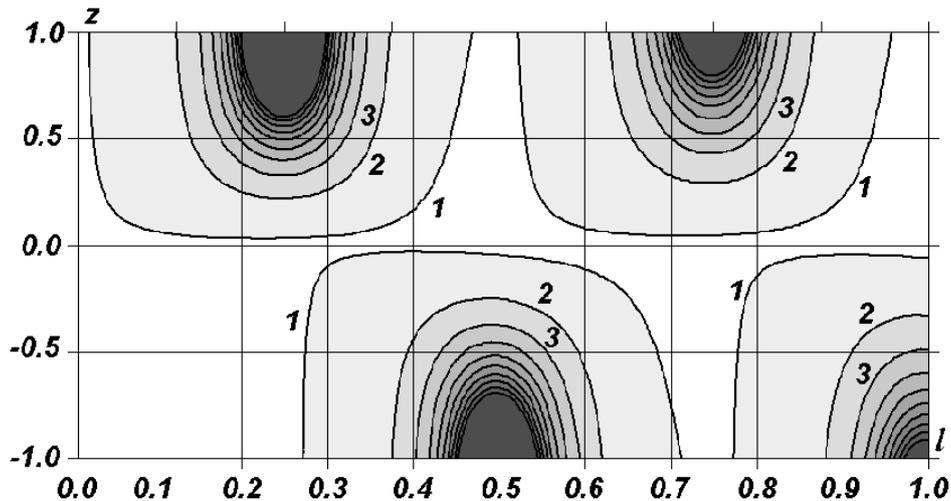


Рис. 2. Линии уровня  $\max_x |U(x)|^2$  для различных значений длины линии  $l$  и сопротивления нагрузки  $z$ .

## 6. Выводы

1. В длинной линии с генератором на левом конце и активной нагрузкой  $R_S$  на правом конце максимальные установившиеся значения токов и напряжений достигаются всегда для вырожденных режимов, т.е. при КЗ либо ХХ. Это характерно для линии без потерь и для неискажающей линии с потерями.
2. Изменение модулей  $|I(x)|^2$  и  $|U(x)|^2$  как функции от  $R_S$  в случае длинной линии с произвольными потерями имеет более сложный характер, чем в случае идеальной линии, а также линии без искажений сигнала. В линии с потерями наблюдаются локальные максимумы для тока и напряжения при изменении нагрузки от режима короткого замыкания до режима холостого хода и самой длины линии.
3. Введение безразмерного параметра нагрузки  $z = (R_S - Z_B) / (R_S + Z_B)$ , который принимает значение  $z = -1$  при коротком замыкании и  $z = 1$  при холостом ходе позволил получить обобщенные зависимости изменения исследуемых параметров для любой волновой длины линии и диапазона изменения ее нагрузки.

## Литература

- [1] Berzan V., Rimschi V. Procese nestationare în circuite electrice neomogene. Sub redacția Postolache P. – Chișinău: Combinatul Poligrafic Chișinău, 1998. –416p.
- [2] Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. Учеб. для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. –7-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1978. –528с.
- [3] Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи /Учебник для ВТУЗов. – М.: Высшая школа, 1984. – 559с.

- [4] Dragan G., Golovanov N., Mazzeti C., Moraru A., Nicoara B., Nucci C. A., Costea M., Dragan L. D. Tehnica tensiunilor înalte. Vol. II. – București: Editura AGIR, 2001. –732p.
- [5] Каганов З.Г. Электрические цепи с распределенными параметрами и цепные схемы. М.: Энергоатомиздат, 1990. –248с.
- [6] Караев Р.И. Переходные процессы в линиях большой протяженности. М.: Энергия, 1978. –191с.
- [7] Костенко М.В., Гумерова М.И., Данилин А.Н., Ефимов Б.В., Потапов В.В., Смирнов А.А. Волновые процессы и перенапряжения в подземных линиях. – С.-П.: Энергоатомиздат, 1991. –232с.
- [8] Круг К.А. Основы электротехники. – Л.: ОНТИ, 1936. –888с.
- [9] Круг К.А. Переходные процессы в линейных электрических цепях. – М. –Л.: ГЭИ, 1948. –344с.
- [10] Нейман Л.Р. Теоретическая электротехника. Избранные труды. – Л.: Наука, ЛО, 1988. – 334с.
- [11] Rimschi V., Berzan V., Tîrșu M., Uzun M., Rimschi S. Soluții precise a ecuațiilor telegrafiștilor. – Chișinău: Tipografia AȘM, 2007. –86p.
- [12] Круг К.А. Основы электротехники. – Л.: ОНТИ, 1936. –888с.
- [13] Ковалев Г.Ф., Лебедева П.М. Планетарная электроэнергетическая система. – Энергия, 2006, №9, с. 27–34.

**Сведения об авторах:**

	<p><b>Пацюк В.И.</b> Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института энергетики АНМ и доцент Государственного Университета Молдовы. Область научных интересов: численные методы расчета, математическая физика, механика твердого тела, теоретическая электротехника и энергетика. Автор более 100 научных публикаций, в том числе 1 патента и 10 монографий. E-mail: patsiuk@mail.ru</p>
	<p><b>Берзан В.П.</b> Доктор-хабилитат технических наук. Директор Института энергетики АНМ. Область научных интересов: диагностика энергетического оборудования, нестационарные процессы в неоднородных электрических цепях, математическое моделирование, транспорт электроэнергии на большие расстояния, возобновляемые источники энергии. Автор более 200 научных публикаций, в том числе 20 патентов и 12 монографий. E-mail: berzan@ie.asm.md.</p>
	<p><b>Анисимов В.К.</b> Доктор технических наук, зав. Лабораторией «Моделирование и диагностика энергетического оборудования» Института энергетики АНМ. Область научных интересов: неразрушающие методы контроля и диагностики, возобновляемые источники энергии, ветроэнергетика, технологии получения водорода. Численные методы расчета. Автор более 80 статей и 80 изобретений.</p>

	<p><b>Кабак С.С.</b> Доктор технических наук, научный сотрудник Лаборатории «Моделирование и диагностика энергетического оборудования» Института энергетики АНМ. Область научных интересов: физика полупроводников и устройства на их основе, возобновляемая энергетика на основе прямого преобразования солнечной энергии фотопреобразовательными модулями. Автор 12 научных статей.</p>
	<p><b>Посторонка Св. А.</b> Научный сотрудник Института энергетики АНМ. Область научных интересов: диагностика энергетического оборудования, возобновляемые источники энергии. Автор 20 научных публикаций, участник международных выставок по изобретательству. Отмечен дипломами и бронзовыми медалями.</p>