

Engineering method of calculation temperature fields and thermal stresses in the initial stage of radiation convection heating (cooling) body with variable heat transfer coefficient, and the temperature at environment

Gorbunov A.D., Ukleina S.V.
Dneprodzerzhinsk State Technical University
Dnepropetrovsk, Ukraine

Abstract. Existing solutions of radiant and convective heating (cooling) body problems at the initial stage at unsteady heat transfer coefficients and temperatures are rather cumbersome. The purpose of this work is getting simpler dependencies. Decisions are based on the analysis of relations between the cause (heat flow) and the effect (surface temperature) in the initial period of heating. Two simple and effective engineering methods of calculation of unsteady temperature fields, and axial thermal stresses at the initial stage of heating (cooling) of body of canonical form for both convection and radiation heat transfer at variable ambient temperature and environmental factors have been developed. Some of the solutions are generic in nature, which allows significantly reducing the number of variables and thus using the graphical method of problem solving. The formulas for calculating the bulk and central temperature in the initial stage are provided; other researchers of nonlinear heat conduction problems did not usually do this. It has been found that the axial thermal stresses are determined entirely by the heat flow on the surface. The adequacy of the developed techniques is based on five cases of calculation of heating (cooling) plates under various conditions of its thermal loading. It is shown that the error in determining the surface temperature does not exceed 6%, and that the developed method can be used up to Fourier numbers $Fo \leq 0,4$.

Keywords: convection, radiant heating (cooling), the initial stage, unsteady temperature fields, variables heat transfer coefficients, thermal stress, and engineering method of calculation.

Metoda inginerescă de calcul a câmpurilor de temperatură și tensiuni termice la etapa inițială de încălzire prin convecție radiație (răcire) a corpurilor la rate variabile de transfer de căldură și de temperatură

Gorbunov A.D., Ucleina S.V.
Universitatea Tehnică de Stat din Dneprodzerjinsk
Dneprodzerjinsk, Ucraina

Rezumat. Soluțiile existente ale problemelor de încălzire (radiantă și cu convecție) sau răcire a corpurilor într-un stadiu inițial, cu coeficienți nestaționari de transfer termic și la temperatura variabilă a mediului ambiant sunt foarte complicate și de mare volum. Scopul acestei lucrări constă în obținerea unor dependente mai simple. Soluțiile se bazează pe analiza ecuațiilor între cauza (fluxul de căldură) și efectul (temperatura la suprafață), în perioada inițială de încălzire. Au fost elaborate două metodologii ingineresti simple și eficiente pentru calculul câmpurilor nestaționare de temperatură și tensiune termice axiale la etapa inițială de încălzire (răcire) a corpurilor în forma canonică. A fost studiat regimul atât prin convecție, cât și prin radiație la coeficienți variabili de transfer de căldură și la temperatura mediului ambiant. Unele dintre soluții sunt generalizate, ceea ce permite reducerea semnificativă a numărului de variabile și, prin urmare, permite utilizarea metodologiei grafice de rezolvare a problemei. Este stabilit, că tensiune termice axiale definesc în întregime fluxul de căldură la suprafață. Caracterul adecvat al metodologiilor elaborate este bazat pe cinci cazuri de încălzire (răcire) a plitei în condiții diferite de încărcare termice a ei. S-a demonstrat, că eroarea de calcul a temperaturilor suprafeței nu depășește 6% și metodologia propusă poate fi utilizată până la numărul Fourier $Fo \leq 0,4$.

Cuvinte-cheie: Scimb de căldură prin radiație și prin convecție, coeficienți de schimb de căldură nestaționare, încălzire, răcire, stadiu inițial, temperstură medie și centrală a masei corpului.

Инженерная методика расчета полей температур и термических напряжений на начальной стадии радиационно- конвективного нагрева (охлаждения) тел при переменных коэффициентах теплообмена и температуре среды

Горбунов А.Д., Уклеина С.В.
Днепродзержинский государственный технический университет
Днепродзержинск, Украина

Аннотация. Существующие решения задач лучисто-конвективного нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии при нестационарных коэффициентах теплообмена и температуры среды довольно громоздки. Цель данной работы получение более простых зависимостей. Решения базируются на основе

анализа полученных ранее авторами уравнений связи между причиной (тепловым потоком) и следствием (температурой поверхности) в начальный период нагрева. Разработаны две простые и эффективные инженерные методики расчета нестационарных полей температур и осевых термических напряжений на начальной стадии нагрева (охлаждения) тел канонической формы одновременно конвекцией и излучением при переменных коэффициентах теплообмена и температуре окружающей среды. Некоторые из решений носят обобщенный характер, позволяющий значительно уменьшить число переменных и таким образом использовать графический способ решения задачи. Приведены формулы для расчета среднemasсовых и центральных температур на начальной стадии, чего обычно не делали другие исследователи нелинейных задач теплопроводности. Установлено, что осевые термические напряжения целиком определяются тепловым потоком на поверхности. Адекватность разработанных методик установлена на пяти случаях расчета нагрева (охлаждения) плиты при различных условиях ее теплового нагружения. Показано, что погрешность определения температур поверхности не превышает 6 % и что разработанной методикой можно пользоваться до чисел Фурье $Fo \leq 0,4$.

Ключевые слова: лучисто-конвективный теплообмен, нагрев, охлаждение, начальная стадия, среднemasсовые и центральные температуры, инженерная методика расчета.

Введение. Знание температурных полей, а следовательно и возникающих термических напряжений позволит назначать рациональные энерго- и материало- сберегающие режимы нагрева тел в печах, сушильных аппаратах и других установках.

При рассмотрении инерционной стадии, когда процессу нагрева (охлаждения) подвержены только тонкие поверхностные слои массивного тела, последнее можно считать полубесконечным плоским телом.

В работе [1] получены интегральные уравнения для определения температуры поверхности $T_n(\tau)$ при известном удельном тепловом потоке

$$T_n(\tau) = T_0 \pm g_1 q(\tau) \cdot \sqrt{\tau} \cdot B_q(\tau) \quad (1)$$

и для расчета теплового потока $q(\tau)$ при заданной температуре на поверхности тела

$$q(\tau) = g_2 \cdot T_n(\tau) \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot B_T(\tau), \quad (2)$$

где $g_1 = p/b$; $g_2 = b/\sqrt{\pi}$; $p = 2/\sqrt{\pi}$; $b = \sqrt{\lambda C_V}$ — коэффициент теплоусвоения; C_V — объемная теплоемкость тела; λ — коэффициент теплопроводности; T_0 — начальная температура тела, К; q — тепловой поток на поверхности; коэффициент

$$B_q(\tau) = \frac{1}{2q\sqrt{\tau}} \int_0^\tau \frac{q(\xi)d\xi}{\sqrt{\tau-\xi}} \equiv \frac{q(0)}{q(\tau)} + \frac{1}{q(\tau)} \int_0^\tau q'(\xi)\sqrt{\tau-\xi}d\xi$$

может быть интерпретирован как безразмерный тепловой поток;

$$B_T(\tau) = \frac{T_n(0)}{T_n(\tau)} + \frac{\sqrt{\tau}}{T_n(\tau)} \int_0^\tau \frac{T_n'(\xi)d\xi}{\sqrt{\tau-\xi}}.$$

Знак «-» в уравнении (1) соответствует охлаждению тела, а «+» — нагреву.

В статье [1] разработана инженерная методика аналитического расчета процессов нагрева (охлаждения) тела на основании решения уравнений (1) и (2) при линейных граничных условиях I, II и III родов на начальной стадии.

В [1] приведен также расчет начальной стадии радиационного нагрева (охлаждения) тел. Данная работа посвящена решению задачи теплопроводности при смешанном радиационно-конвективном теплообмене. Ранее [1] было показано, что в отличие от конвективного теплообмена, при теплообмене излучением процессы нагрева и охлаждения не являются симметричными, поэтому их приходится рассматривать по отдельности.

Решение задачи при нагреве. В этом случае тепловой поток с учетом нестационарности коэффициентов теплообмена и температуры среды $T_c(\tau)$ имеет вид

$$q(\tau) = \alpha(\tau)[T_c(\tau) - T_n(\tau)] + \sigma(\tau) \cdot [T_c^4(\tau) - T_n^4(\tau)], \quad (3)$$

где α — коэффициент теплоотдачи конвекцией; $\sigma = \varepsilon \cdot \sigma_0$ — коэффициент излучения; ε — приведенная степень черноты.

Подставляя тепловой поток (3) в уравнение (1), получим решение в неявной критериальной форме

$$Fo = \left[\frac{\theta_n(Fo) - \theta_0}{H \cdot Q(\theta_n, Fo)} \right]^2, \quad (4)$$

где $Fo = a\tau/R_0^2$ — число Фурье; a — коэффициент температуропроводности; относительные температуры: текущая — $\theta = T(x, \tau)/T_x$; начальная — $\theta_0 = T_0/T_x$; среды — $\theta_c = T_c/T_x$; $\theta_n(Fo) = T_n(\tau)/T_x$ — на поверхности; T_x — характерная или масштабная температура, например, температура окружающей среды в начальный момент времени $T_x = T_{c,0}$, К.

$$Q(\theta_n, Fo) \equiv Ki = Bi(Fo) \times [\theta_c(Fo) - \theta_n(Fo)] + Sk(Fo) \cdot [\theta_c^4(Fo) - \theta_n^4(Fo)] \quad (5)$$

— относительный тепловой поток, число Кирпичева; $Bi(Fo) = \alpha(\tau) \cdot R_0 / \lambda$ — число Био; $Sk(Fo) = \sigma(\tau) \cdot T_x^3 \cdot R_0 / \lambda$ — радиационное число Старка; R_0 — характерный размер тела.

Для реализации прямой задачи — определения в явном виде при заданном времени, следует решить уравнение 4-й степени относительно искомой температуры поверхности $T_n(\tau)$. Приводя уравнение (4) к каноническому виду, получим

$$NZ^4 + Z - 1 = 0, \quad (6)$$

где $Z = \frac{\theta_n}{A}$; $A = \frac{\theta_0 + \theta_c(Fo) \cdot \eta_\kappa + \theta_c^4(Fo) \cdot \eta_\lambda}{1 + \eta_\kappa}$;

$$N = \frac{A^3 \cdot \eta_\lambda}{1 + \eta_\kappa}; \quad \eta_\kappa = H \cdot y_\kappa; \quad y_\kappa = Bi(Fo) \sqrt{Fo} \equiv \gamma_\kappa \sqrt{\tau}$$

— безразмерное модифицированное время в случае нагрева конвекцией; $\gamma_\kappa = \alpha(\tau)/b$;

$\eta_\lambda = H \cdot y_\lambda$; $y_\lambda = Sk(Fo) \cdot \sqrt{Fo} \equiv \gamma_\lambda \cdot \sqrt{\tau}$ — время при лучистом теплообмене; $\gamma_\lambda = \sigma(\tau) \cdot T_x^3 / b$;

$H = p \cdot B_q$ — при малых временах процесса, когда $y < 1$ и $H = \sqrt{\pi} / B_T$ при больших $y \geq 1$.

Уравнение (4) или (6) должно решаться методом последовательных приближений, т.к. значение B_q , входящее в выражение (1), либо B_T , определяемое формулой (2), зависит от величины еще не найденного теплового потока или искомой температуры поверхности. Однако, анализ [1, 2, 3] решения задачи конвективного теплообмена показал, что величина B_q , как и B_T , изменяется в достаточно узком диапазоне от 1 до 1,5, поэтому без большой потери точности можно в дальнейшем положить $B_q = 1$ и $B_T = 1$.

Покажем ход решения уравнения (6).

Разлагая функцию (6) в ряд Тейлора для малых N , будем иметь

$$Z \cong 1 - N + 4N^2 - 2 \cdot N^3 + \dots \quad (7)$$

Эта формула дает результаты с точностью δ_Z до 5%, если $N \leq 0,13$ при одном члене разложения, когда $Z \approx 1 - N$, для $N < 0,16$ — при двух и $N < 0,18$ при трех членах разложения (7). По аналогии можно получить разложение в окрестности точек $Z(N=8)=0,5$; $Z(192)=0,25$; $Z(500)=0,2$; $Z(9000)=0,1$ и $Z(152000)=0,05$. Например, для точек, близких к $N=8$:

$$Z(N) \approx \frac{1}{2} - \frac{N-8}{80} - \frac{7}{10000}(N-8)^2 - \frac{363}{8 \cdot 10^5}(N-8)^3. \quad (8)$$

Для случая больших N приближенную асимптотику получим, решая (6) при $Z=0$. Тогда

$$Z = 1/\sqrt[4]{N}. \quad (9)$$

При $N > 500$ погрешность формулы (9) менее 5,7%, хотя абсолютная разность не выходит за пределы $\Delta Z = 0,025$ уже при $N \geq 100$.

Для получения более точных формул воспользуемся методом касательных Ньютона, итерационная формула которого для решения уравнения (6) имеет вид

$$Z_{k+1} = Z_k - \frac{f(Z_k)}{f'(Z_k)} = \frac{1+3NZ_k^4}{1+4NZ_k^3}, \quad (10)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ — номер итерации.

Число итераций по уравнению (10), необходимое для достижения заданной точности ε , когда $|Z_{k+1} - Z_k| \leq \varepsilon$ можно значительно сократить, если правильно выбрать первое приближение. Полагая в (10) $Z_k = 1$, получим уравнение

$$Z = \frac{1+3N}{1+4N} \equiv 1 - N/(1+4N), \quad (11)$$

справедливое при малых $N < 0,58$ и $\delta_Z \leq 5\%$, либо $N < 0,25$ и $\delta_Z \leq 1\%$.

Для больших N , после подстановки (9) в уравнение (10), будем иметь

$$Z = \frac{1}{1/4 + N^{1/4}} \quad (12)$$

с погрешностью менее 5% при $N \geq 4$.

В случае проведения экспресс расчетов, не нуждающихся в особой точности, при определении $Z(N)$ можно воспользоваться графиком, который легко строится по формуле (6), разрешенной относительно N

$$N = (1 - Z)/Z^4. \quad (13)$$

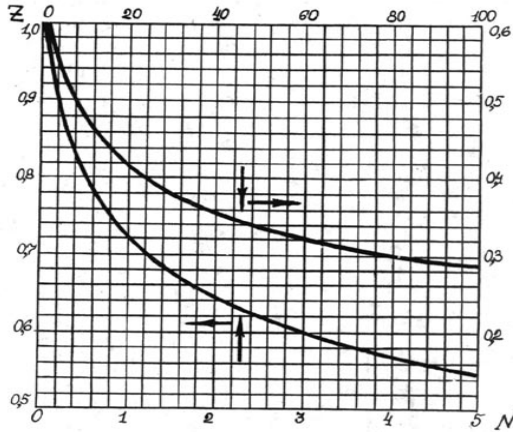


Рис. 1. Номограмма для определения относительной температуры поверхности (графическое решение уравнения $NZ^4 + Z - 1 = 0$)

На рисунке 1 в качестве примера приведена зависимость (13), а в [1] дана таблица $Z(N)$.

После определения Z из уравнений (6)...(13) или из графика (рис. 1), окончательно температура поверхности $T_n = Z \cdot A \cdot T_x$, К.

Следует отметить, что решение (6) очень выгодно отличается от (4). Согласно уравнению (4) температура поверхности является функцией от четырех чисел подобия $\theta_n = f(\text{Bi}, \text{Sk}, \theta_c, \text{Fo})$ и такую зависимость весьма трудно изобразить графически. А из выражения (6) вытекает, что θ_n есть функция только одного критерия N и она реализована на рис. 1.

С другой стороны, уравнение (4) можно представить в следующем обобщенном виде:

$$\theta_n(\text{Fo}) = \theta_0 + H \cdot \text{Ti}(\text{Fo}), \quad (4a)$$

где $\text{Ti}(\text{Fo}) = Q(\theta_n, \text{Fo}) \cdot \sqrt{\text{Fo}}$ общее модифицированное время, число Тихонова.

Решение при охлаждении. Полученные выше решения, описывающие лучисто-конвективный нагрев тела, в принципе можно использовать и здесь, т.к. тепловой поток имеет тот же вид (3) или (5), только с обратным знаком, однако, при охлаждении возможны случаи теплообмена в среду с нулевой температурой, поэтому она не может быть масштабной.

Решая, как и ранее, совместно уравнения (1) и (3), но уже выбирая в качестве характерной

температуры не $T_{c,0}$, а максимально возможную, начальную температуру $T_x = T_0$, получим решения (4) и (6), в которых следует положить относительную начальную температуру $\theta_0 = 1$.

В статье авторов [4] разработана приближенная методика расчета температур при конвективно-лучистом охлаждении тел простой формы в квазистационарной стадии ($\text{Fo} > 0,3$). Задача решалась при тепловом потоке

$$Q(\theta_n) = \text{Bi} \cdot \theta_n \cdot (1 + \beta_1 \cdot \theta_n(\text{Fo})), \quad (14)$$

где $\theta = (T - T_c)/\Delta T_0$ — относительная температура при охлаждении; $\Delta T_0 = (T_0 - T_c)$ — максимальный температурный напор; $\beta_1 = \tilde{\beta} \cdot \Delta T_0$; $\tilde{\beta}$ — коэффициент, учитывающий теплообмен излучением [4].

Для начальной стадии, когда число Фурье меньше времени инерционного периода Fo_1 , после подстановки теплового потока (14) в уравнение (1), получим неявную формулу, аналогичную (4):

$$\text{Fo} = \left[\frac{1 - \theta_n(\text{Fo})}{H \cdot \text{Bi}(\text{Fo}) \cdot \theta_n(\text{Fo}) \cdot (1 + \beta_1 \cdot \theta_n(\text{Fo}))} \right]^2 \quad (15)$$

или в явном виде, после решения теперь квадратного уравнения относительно искомой температуры на поверхности

$$\theta_n(\text{Fo}) = 1 / [(1 + \eta) \cdot \omega(\eta)], \quad (16)$$

где $\omega(\eta) = (1 + \sqrt{1 + 4\tilde{\rho}})/2$; $\tilde{\rho} = \beta_1 \cdot \eta / (1 + \eta)^2$; при малых $\tilde{\rho}$ величина $\omega \approx 1 + \tilde{\rho}$; $\eta = H\text{Bi}(\text{Fo})\sqrt{\text{Fo}}$.

В заключение приведем еще одну, упрощенную методику расчета температур на начальной стадии.

Учитывая алгебраическое тождество $(a^4 - b^4) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2)$, запишем тепловой поток (5) в форме

$$Q(\theta) = \text{Bi}(\theta_c - \theta) + \text{Sk}(\theta_c - \theta) \cdot Y(\theta), \quad (17)$$

где $Y(\theta) = (\theta_c + \theta) \cdot (\theta_c^2 + \theta^2)$; θ — температура на поверхности $\theta = \theta_n$.

Упрощение заключается в замене кубической зависимости $Y(\theta)$ линейной $Y(\theta) \approx \theta_c^3 + 3\theta_c^2 \cdot \theta$.

Далее перейдем от относительной температуры $\theta = T(x, \tau)/T_x$ к избыточной $\vartheta = (T(x, \tau) - T_c)/(T_0 - T_c)$. Деля последовательно числитель и знаменатель на характерную температуру T_x , получим связь между ними:

$$\vartheta = \frac{\theta - \theta_c}{\theta_0 - \theta_c} \text{ или } \theta = \theta_c - (\theta_c - \theta_0) \cdot \vartheta. \quad (18)$$

С учетом сказанного, тепловой поток (17) примет «конвективный» вид:

$$Q(\vartheta) = \text{Bi}_3 \cdot \vartheta \cdot (1 + \beta_2 \cdot \vartheta), \quad (19)$$

где $\text{Bi}_3 = \text{Bi} + 4 \cdot \text{Sk} \cdot \theta_c^3$ — эффективное число Био, учитывающее теплообмен излучением;

$$\beta_2 = -3\text{Sk}(\theta_c - \theta_0) \cdot \theta_c^2 / \text{Bi}_3.$$

Далее используются решения (15) и (16) в которых тепловой поток берется по уравнению (19).

В случае определения термических напряжений необходимо знание среднemasсовой и центральной температур. В работе [4] для модели с тепловым потоком (14) было получено

$$\vartheta_{cp}(\text{Fo}) = \vartheta_n(\text{Fo}) + g \cdot Q(\vartheta_n), \quad (20)$$

где температура поверхности на начальной стадии будет определяться уравнением (15) или (16).

Аналогичную формулу можно записать для модели (3)

$$\theta_{cp}(\text{Fo}) = \theta_n(\text{Fo}) - g \cdot Q(\theta_n), \quad (21)$$

где $g = 1/(k + 2)$; k — фактор геометрической формы, равный 1 для пластины, 2 — цилиндра, 3 — шара. Расчет $\theta_n(\text{Fo})$ — см. уравнение (4) или (6). Приведем еще один, упрощенный способ определения $\theta_{cp}(\text{Fo})$. Для этого воспользуемся идеей [5] термического слоя $\delta(\tau) = 2u_0\sqrt{a\tau}$ и примем параболическое изменение температур в пределах этого слоя

$$\theta(X, \text{Fo}) = \theta_n(\text{Fo}) + (\theta_n(\text{Fo}) - \theta_0) [X^2 - 2X], \quad (22)$$

где $X = x / \delta(\tau)$.

Среднemasсовую температуру пластины получим интегрированием уравнения (22) по координате:

$$\theta_{cp}(\text{Fo}) = \int_0^1 \theta(X) \cdot dX = (\theta_n(\text{Fo}) + 2 \cdot \theta_0) / 3. \quad (23)$$

Температуру в центральных точках тела θ_y найдем, используя понятие о коэффициенте K_2 усреднения теплового потока. Согласно [6] при нагреве $K_2 = Q/(\theta_n - \theta_y)$, откуда

$$\theta_y(\text{Fo}) = \theta_n(\text{Fo}) - Q(\theta_n) / K_2 \quad (24)$$

или в случае охлаждения

$$\vartheta_y(\text{Fo}) = \vartheta_n(\text{Fo}) + Q(\vartheta_n) / K_2. \quad (25)$$

При умеренных критериях теплообмена (Bi , Sk) коэффициент $K_2 \approx 2$.

Для расчета θ_y на самой ранней начальной стадии ($\text{Fo} < 0,1$) можно рекомендовать аппроксимационную формулу $\theta_y(\text{Fo}) = \theta_0 + K_y \cdot \text{Fo}^3$ или

$$\vartheta_y(\text{Fo}) = 1 - K_y \cdot \text{Fo}^3, \quad (26)$$

где $K_y = \varepsilon_n / (2\text{Fo}_1^3)$; Fo_1 — время инерционного периода; $\varepsilon_n = 5\% = 0,05$ — условная степень начала прогрева центральных точек тела, когда принимается, что

$$\theta_y(\text{Fo}_1) = \theta_0 + \varepsilon_n \text{ либо } \vartheta_y(\text{Fo}_1) = 1 - \varepsilon_n. \quad (27)$$

Приближенно можно считать, что время инерционного периода находится между режимами $T_n = \text{const}$ (граничные условия I рода) и $Q_n = \text{const}$ (граничные условия II рода), т.е.

$$0,1 < \text{Fo}_1 < 1/(2(k + 2)). \quad (28)$$

Более точно, для рассматриваемой здесь задачи, это время можно найти, если условие (27) подставить в уравнение (24) или (25) и разрешить его относительно Fo_1 .

Теперь данных достаточно, чтобы, следуя методике [4], записать осевые относительные термические напряжения на поверхности:

$$\text{при нагреве } \tilde{\sigma}_n(\theta) = \theta_{cp}(\text{Fo}) - \theta_n(\text{Fo})$$

$$\text{или охлаждения } \tilde{\sigma}_n(\vartheta) = \vartheta_{cp}(\text{Fo}) - \vartheta_n(\text{Fo}) \quad (29)$$

и в центральных точках

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_y(\theta) &= \theta_{cp}(Fo) - \theta_y(Fo) \text{ либо} \\ \tilde{\sigma}_y(\vartheta) &= \vartheta_{cp}(Fo) - \vartheta_y(Fo), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\sigma(\tau) = \sigma_0 \cdot \tilde{\sigma}(Fo)$; $\sigma_0(\theta) = S_1 \cdot T_x$; $\sigma_0(\vartheta) = S_1 \cdot (T_0 - T_c)$; $S_1 = \beta_L \cdot E / (1 - \nu)$; β_L — линейный коэффициент термического расширения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

С учетом выражений (20), (21) для среднemasовой и (24), (25) — центральной температур, уравнения (29) и (30) можно упростить до вида:

$$\begin{aligned} \text{на поверхности } \tilde{\sigma}_n(\theta) &= -g \cdot Q(\theta_n), \\ \tilde{\sigma}_n(\vartheta) &= g \cdot Q(\vartheta_n) \end{aligned} \quad (31)$$

и в центре

$$\tilde{\sigma}_y(\theta) = K_A \cdot Q(\theta_n), \quad \tilde{\sigma}_y(\vartheta) = -K_A \cdot Q(\vartheta_n), \quad (32)$$

где $K_A = gk/2 = k/[2(k+2)]$.

Из последних уравнений вытекает, что к концу начальной стадии осевые термические напряжения прямо пропорциональны тепловому потоку на поверхности и зависят только от его величины. Интересно отметить, что согласно формулам (29)...(32) термонапряжения существенно изменяются со временем, а их отношение

$$R = \sigma_n / \sigma_y = -2/k \quad (33)$$

есть величина постоянная, зависящая лишь от формы тела.

Для оценки адекватности методики приведем несколько численных примеров расчета. Во всех случаях сравниваться будем с точным значением температур поверхности при малых временах процесса, полученных в соответствующих работах методом конечных разностей (МКР).

Пример 1. При нагреве пластины от начальной температуры $\theta_0 = 0,2$ с числом Старка $Sk = 2$ и постоянной $\theta_c = 1$ в момент времени $Fo = 0,3$ температура поверхности согласно [7] достигла величины $\theta_n^T(0,3) = 0,8774$. Сначала решим обратную

задачу с использованием уравнения (4). Тепловой поток

$$Q(\theta_n) = Sk(1 - \theta_n^4) = 2 \cdot (1 - 0,8774^4) = 0,815.$$

Примем $H = P = 2/\sqrt{\pi} = 1,128$. Время нагрева по (4):

$$Fo = [(0,8774 - 0,2)(1,128 \cdot 0,815)]^2 = 0,388.$$

Таким образом, погрешность расчета времени $\Pi_{Fo} = (1 - 0,388/0,3) \cdot 100 = -29,2\%$.

Теперь решаем по уравнению (6) прямую задачу. Здесь $Bi = 0$, $\eta_k = 0$; лучистое модифицированное время

$$\eta_n = H \cdot Sk \cdot \sqrt{Fo} = 1,128 \cdot 2 \cdot \sqrt{0,3} = 1,236;$$

$$A = \theta_0 + \eta_n = 0,2 + 1,236 = 1,436; \quad \text{число}$$

$$N = A^3 \cdot \eta_n = 1,436^3 \cdot 1,236 = 3,661. \quad \text{По формуле}$$

$$(12) \quad Z = 1/(0,25 + 3,661^{1/4}) = 0,612. \quad \text{Искомая}$$

$$\text{температура поверхности}$$

$$\theta_n = A \cdot Z = 1,436 \cdot 0,612 = 0,879; \quad \text{погрешность ее}$$

определения

$$\Pi_\theta = (1 - 0,879/0,8774) \cdot 100 = -0,2\%.$$

Пример 2. Охлаждение плиты от начальной $\theta_0 = 1$ в среду с $\theta_c = 0$ при числе $Sk = 1,5$. Согласно [8] $\theta_n^T(0,38) = 0,70$.

Обратная задача: $H = p$; тепловой поток

$$Q = Sk(\theta_c^4 - \theta_n^4) = 1,5(0 - 0,7^4) = -0,360. \quad \text{По}$$

$$\text{формуле} \quad (4)$$

$$Fo = [(0,7 - 1)/(1,128(-0,36))]^2 = 0,545.$$

Погрешность

$$\Pi_{Fo} = (1 - 0,545/0,38) \cdot 100 = -43,4\%.$$

Прямая задача: $\eta_k = 0$; лучистое время

$$\eta_n = pSk \cdot \sqrt{Fo} = 1,128 \cdot 1,5 \cdot \sqrt{0,38} = 1,045; \quad A = 1;$$

$$N = \eta_n = 1,045. \quad \text{По формуле} \quad (11)$$

$$Z = 1 - N/(1 + 4N) = 1 - 1,045/(1 + 4 \cdot 1,045) = 0,798.$$

После трех итераций по уравнению (10)

$$Z = 0,72. \quad \text{Окончательно, температура}$$

$$\text{поверхности } \theta_n = 0,72. \quad \text{Погрешность}$$

$$\Pi_\theta = (1 - 0,72/0,7) \cdot 100 = -2,8\%.$$

Пример 3. Нагрев пластины от $\theta_0 = 0,15$ при нестационарном числе Био $Bi(Fo) = 0,5e^{Fo}$

и температуре среды $\theta_c^{(Fo)} = 1 + 0,075 \cdot Fo$.

Согласно [9] при $Fo = 0,4$ температура

$$\text{поверхности } \theta_n^T(0,4) = 0,482. \quad \text{Число Био}$$

$$Bi(0,4) = 0,5 \cdot e^{0,4} = 0,746; \quad \text{температура среды}$$

$$\theta_c = 1 + 0,075 \cdot 0,4 = 1,03; \quad \text{тепловой поток}$$

$Q(\theta) = \text{Bi}(\theta_c - \theta_n) = 0,746(1,03 - 0,482) = 0,409$;
 $H = p$. Время нагрева по (4):
 $Fo = [(0,482 - 0,15)/(1,128 \cdot 0,409)]^2 = 0,520$.
 Погрешность в определении времени
 $\Pi_{Fo} = (1 - 0,52/0,4) \cdot 100 = -30\%$.

Прямая задача: $\eta_n = 0$, конвективное
 модифицированное время
 $\eta_k = p \cdot \text{Bi} \sqrt{Fo} = 1,128 \cdot 0,746 \cdot \sqrt{0,4} = 0,532$;
 $A = (\theta_0 + \theta_c \cdot \eta_k)/(1 + \eta_k) =$
 $= (0,15 + 1,03 \cdot 0,532)/(1 + 0,532) = 0,456$; $N = 0$;
 $Z = 1$. Температура поверхности
 $\theta_n = Z \cdot A = 0,456$. Погрешность в определении
 температуры $\Pi_\theta = (1 - 0,456/0,482) \cdot 100 = 5,5\%$.

Пример 4. Нагрев плиты от $\theta_0 = 0,2$
 одновременно конвекцией ($\text{Bi} = 1$) и
 излучением ($\text{Sk} = 0,5$) при $\theta_c = 1$. Согласно
 [10] температура поверхности через время
 $Fo = 0,3$ $\theta_n^T(0,3) = 0,699$. Тепловой поток
 $Q(\theta_n) = \text{Bi}(1 - \theta_n) + \text{Sk}(1 - \theta_n^4) =$
 $= 1(1 - 0,699) + 0,5(1 - 0,699^4) = 0,682$; $H = p$.
 Время нагрева
 $Fo = [(0,699 - 0,2)/(1,128 \cdot 0,682)]^2 = 0,421$.
 Погрешность расчета времени
 $\Pi_{Fo} = (1 - 0,421/0,3) \cdot 100 = -40,3\%$.

Прямая задача: модифицированное время
 $\eta_k = p \cdot \text{Bi} \sqrt{Fo} = 1,128 \cdot 1 \cdot \sqrt{0,3} = 0,618$,
 $\eta_n = p \cdot \text{Sk} \sqrt{Fo} = 1,128 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{0,3} = 0,309$;
 $A = (\theta_0 + \eta_k + \eta_n)/(1 + \eta_k) =$
 $= (0,2 + 0,618 + 0,309)/(1 + 0,618) = 0,697$; число
 $N = A^3 \eta_n / (1 + \eta_k) = 0,697^3 \cdot 0,309 / (1 + 0,618) = 0,065$;
 по формуле (11)
 $Z = 1 - 0,065 / (1 + 4 \cdot 0,065) = 0,949$. Температура
 поверхности $\theta_n = A \cdot Z = 0,697 \cdot 0,949 = 0,661$.
 Погрешность $\Pi_\theta = (1 - 0,661/0,699) \cdot 100 = 5,5\%$.

Пример 5. Сделаем расчет задачи
 предыдущего примера по упрощенной
 методике. Эквивалентное число
 $\text{Bi}_3 = \text{Bi} + 4\text{Sk} = 1 + 4 \cdot 0,5 = 3$. Коэффициент
 $\beta_2 = -3\text{Sk}(1 - \theta_n) / \text{Bi}_3 = -3 \cdot 0,5(1 - 0,2) / 3 = -0,4$.
 Избыточная температура поверхности
 $g_n = (1 - \theta_n) / (1 - \theta_0) = (1 - 0,699) / (1 - 0,2) = 0,376$.
 Тепловой поток по формуле (19)
 $Q(g_n) = \text{Bi}_3 g_n (1 + \beta_2 g_n) = 3 \cdot 0,376(1 - 0,4 \cdot 0,376) = 0,959$.
 Время нагрева по уравнению (15)
 $Fo = [(1 - g_n) / p Q(g_n)]^2 = [(1 - 0,376) / (1,128 \cdot 0,959)]^2 =$
 $= 0,332$. Погрешность
 $\Pi_{Fo} = (1 - 0,332/0,3) \cdot 100 = -10,7\%$.

Прямая задача. Модифицированное время
 $\eta = p \cdot \text{Bi}_3 \sqrt{Fo} = 1,128 \cdot 3 \sqrt{0,3} = 1,854$;
 $\tilde{\rho} = \beta_2 \eta / (1 + \eta)^2 = -0,4 \cdot 1,854 / (1 + 1,854)^2 = -0,091$.
 $\omega(\eta) \cong 1 + \tilde{\rho} = 1 - 0,091 = 0,909$. По уравнению
 (16) $g_n = 1 / [(1 + \eta) \cdot \omega(\eta)] = 1 / [(1 + 1,854) \cdot 0,909] = 0,391$.
 Окончательно температура поверхности
 $\theta_n = 1 - (1 - \theta_0) \cdot g_n = 1 - (1 - 0,2) \cdot 0,391 = 0,687$.
 Погрешность в расчете
 $\Pi_\theta = (1 - 0,687/0,699) \cdot 100 = 1,1\%$.

Анализ приведенных численных расчетов
 показал, что:

во-первых, максимальные погрешности
 приходятся на определение времени нагрева
 тела до заданной температуры и не
 превышает 44%, хотя абсолютные
 отклонения не превосходят величин
 $\Delta Fo \leq 0,15$;

во-вторых, расчет по упрощенной
 методике оказался гораздо точнее, чем по
 обычной;

в третьих, погрешность определения
 температуры поверхности не превышает 6% ;

в четвертых, все примеры брались при
 максимальных для начальной стадии,
 длительность которой обычно считается
 $Fo_{\text{НС}} < 0,1$, временах процесса $Fo = 0,3 \dots 0,4$;
 вполне очевидно, что при $Fo < 0,3$
 погрешности расчетов будут меньше.

Выводы.

1. Разработаны две простые и эффективные
 инженерные методики расчета
 нестационарных полей температур и осевых
 термических напряжений на начальной
 стадии нагрева (охлаждения) тел
 канонической формы одновременно
 конвекцией и излучением при переменных
 коэффициентах теплообмена и температуре
 окружающей среды.

2. Одно из решений для температуры
 поверхности оказалось обобщенным, т.е.
 зависящим только от одного критерия и это
 решение было представлено в виде
 номограммы.

3. Упрощенная методика, учитывающая
 теплообмен излучением через эффективное
 число Био, оказалось точнее первоначальной.

4. Приведены формулы для расчета
 среднemasовых и центральных температур
 на начальной стадии, чего обычно не делали
 другие исследователи нелинейных задач
 теплопроводности.

5. Установлено, что осевые термические напряжения целиком определяются тепловым потоком на поверхности.

6. На пяти численных примерах нелинейных задач нагрева (охлаждения) пластины показано, что погрешность определения температур поверхности не превышает 6 % и разработанной методикой можно пользоваться до чисел Фурье $Fo \leq 0,4$.

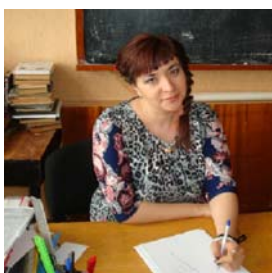
Литература (Referencies)

- [1] Gorbunov A.D. Analiticheskiy raschet protsessov radiatsionnogo nagreva (okhlazhdeniya) tel na nachal'noy stadii [Analytical calculation of objects radiant heating (cooling) processes at the initial stage] // Matematichne modelyuvannya, Nr. 2(27), 2012. – s. 90–94, (In Russian).
- [2] Lardner T. Variatsionnyy printsip Bio dlya resheniya zadach teploprovodnosti Raketnaya tekhnika i kosmonavtika [Bio variational principle for solving problems of heat conduction] // Rocketry and Astronautics. — 1963. — Nr 1. — p. 225—236.
- [3] Abarbanel S. Time dependent temperature distribution in radiating solids // I. Math. and Phys. — 1960. — V. 39. — No 4. — 246.
- [4] Gorbunov A.D., Ukleina S.V. K raschetu nestatsionarnykh temperatur i termicheskikh napryazheniy pri vychislenii koeffitsiyenta teploobmena , uchityvayushchego izlucheniye [For the calculation of nonstationary temperatures and thermal stresses within the calculation of heat transfer coefficient that considering the radiation] // Problemele energeticii regionale termoenergetica. Moldavia. Nr. 1(30) 2016. s. 78–83, (In Russian).
- [5] Postolnik U. S. Priblizhonnnyye metody issledovaniya v termomechanics [The approximate methods of researches in thermomechanics]. – B. – Donetsk: High school, 1984. – 158 pp, (In Russian).
- [6] Gol'dfarb E. M. Teplotekhnika metallurgicheskikh protsessov. [Heat metallurgical processes]- M.: Metallurgiya, 1967.- 439 s. (In Russian).
- [7] Gorbunov A.D., Ukleina S.V. Triki A.I. Analiticheskoye issledovaniye nagreva tverdykh tel radiatsiyey. Soobshcheniye 2. [Analytical studies of the simple shape objects heating by radiation. Letter 2] // Matematichne modelyuvannya . - Dniprodzerzhins'k : DDTU : 2015. Nr. 3 (32) - p. 3-8, (In Russian).
- [8] Gorbunov A.D. Analiticheskoye issledovaniye okhlazhdeniya tverdykh tel radiatsiyey [Analytical studies of the simple shape objects cooling by radiation] // Matematichne modelyuvannya . - Dniprodzerzhins'k : DDTU , 2012 , Nr. 1 (28) . - s. 22-27, (In Russian).
- [9] Salomatov V.V., Goncharov E.I. Temperaturnoye pole neogranichennoy plastiny pri peremennykh znachenyakh koeffitsiyenta teploobmena i temperatury vneshney sredy [Temperature field of unlimited plate within the varied heat transfer coefficient values and the ambient temperature] // IFJ . - 1967. - V. 14. - N4. - p. 743-745, (In Russian).
- [10] Vidin YU. V. Issledovaniye teploprovodnosti tverdykh tel pri peremennykh granichnykh usloviyakh [The thermoconductivity studies of the solids within the varied boundary conditions] // Izvestiya USSR AS Proceedings. Energy and transport. - 1967. - Nr. 4. - p. 132-134, (In Russian).

Сведения об авторах:



Горбунов Александр Дмитриевич, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой теплоэнергетики, Днепродзержинского государственного технического Университета. Область научных интересов: теплоэнергетика, металлургическая теплотехника, нелинейный теплообмен.
E-mail: gorbunov@tpte.ru



Уклеина Светлана Владимировна, аспирант кафедры теплоэнергетики, Днепродзержинского государственного технического университета. Область научных интересов: промышленная теплоэнергетика, нелинейный теплообмен.
E-mail: 84sveta28@mail.ru