

## Mathematical Model of a Three-Phase Electric Line with Split Phases

**Patsyuk V. I., Berzan V. P., Ribacova G. A.**

Institute of Power Engineering  
Chisinau, Republic of Moldova

**Abstract.** An increase in the voltage of electric lines leads not only to an increase in their natural power, but also to the problem of increasing the power losses due to the corona discharge. The use of phases with split wires is used as a technical solution to reduce such losses. The splitting of wires affects the parameters of the line that leads to a change in natural and transmitted power. Therefore, improving the accuracy of calculating the parameters of lines with split phases is an actual problem. The purpose of this work was to develop a mathematical model of a three-phase line with split phases and to evaluate the accuracy of determining its capacitive parameters using the equivalent diameter of the split phase and the finite volume method for calculating the distribution of the electric field parameters based on Maxwell's equations. Using the finite volume method, the values of potential and capacitance coefficients were determined for each of the 15 wires of the 750 kV transmission line. These values were calculated by the mirror image method as well. These calculations for various configurations of the wires arrangement in the split phase gave very close results. It was substantiated the possibility of applying the finite volume method to calculate the parameters of circuits with complex geometry by the criterion of limiting the level of intensity of the field near the wires. The possibility of using approximate formulas for determining the parameters through the equivalent radius of the split phase was confirmed.

**Keywords:** Maxwell's equations, numerical method, electric field distribution, equivalent radius, capacitive coefficients, long line parameters.

**DOI:** 10.5281/zenodo.3239218

### Modelul matematic al unei linii electrice trifazice cu faze split

**Pațiuț V. I., Berzan V. P., Ribacova G. A.**

Instituitul de Energetică  
Chișinău, Republica Moldova

**Rezumat.** Majorarea tensiunii liniilor electrice conduce nu numai la creșterea puterii lor naturale, ci și la creșterea pierderilor de putere din cauza descărcării coroană. Ca soluție tehnică pentru reducerea pierderilor descărcări corona, se utilizează realizarea constructivă ale fazelor ca fascicule de conductoare. Această variantă de construire a fazelor conduce la modificarea parametrilor liniei electrice. Parametrii liniei electrice determină puterea naturală sau capacitatea de transmisie a liniei. Scopul acestei lucrări este de a dezvolta un model matematic al liniei electrice de transmisie trifazate cu faze split și evaluarea preciziei de calcul a parametrilor capacitivi ai liniei, utilizând valoarea diametrului echivalent al fazei split și repartiția câmp electric static, care se obține cu metoda volumului finit în baza ecuațiile lui Maxwell. Cu metoda volumului finit și metoda diametrului echivalent al fazei split s-au calculat valorile coeficienților potențiali și capacitivi pentru fiecare din cele 15 conductoare ale linie de 750 kV. Rezultatele determinării coeficienților capacitivi prin metoda volumului finit pentru diferite configurații ale aranjamentului conductoarelor și cu metoda reflecției oglindă au dat rezultate foarte asemănătoare (diferența se sesizează în a treia zecimală). S-a argumentat posibilitatea utilizării metodei volumului finit pentru calcularea parametrilor circuitelor cu geometrie complexă în scop de optimizare a fazei split, utilizând criteriul de limitare a intensității câmpului electric a conductoarelor pentru a exclude descărcarea corona. Modificarea distanței dintre conductoarele fazei split duce la o variație neliniară coeficienților capacitivi a conductoarelor fazei. S-a confirmat corectitudinea utilizării formulelor aproximative pentru determinarea parametrilor liniilor lungi, utilizând raza echivalentă a fazei split.

**Cuvinte-cheie:** ecuațiile Maxwell, metoda numerică, distribuția câmpului electric, raza echivalentă, coeficienții capacitivi, parametrii liniei.

**Математическая модель трехфазной электрической линии с расщепленными фазами  
Пацюк В. И., Берзан В. П., Рыбакова Г. А.**

Институт энергетики

Кишинэу, Республика Молдова

**Аннотация.** Повышение напряжения электрических линий приводит не только к росту их натуральной мощности, но и к появлению проблемы повышения потерь мощности от короны. В качестве технического решения уменьшения потерь на корону используется применение фаз с расщепленными проводами. Расщепление проводов влияет на параметры линии, а изменение значений параметров приводит к изменению натуральной и передаваемой мощности. Поэтому, повышение точности расчета параметров линий электропередач с расщепленными фазами является актуальной задачей. Цель данной работы состоит в разработке математической модели трехфазной линии электропередачи с фазами из расщепленных проводов и оценке точности определения ее емкостных параметров по эквивалентному диаметру расщепленной фазы и методом конечных объемов на основе уравнений Максвелла. С использованием метода конечных объемов определены значения потенциальных и емкостных коэффициентов для каждого из 15 проводов линии электропередачи напряжением 750 кВ. Значения данных параметров вычислены и по методу зеркального отображения. Результаты расчетов распределения электрического поля методом конечных объемов для различных конфигураций расположения проводов в расщепленной фазе и методом зеркального отображения дали очень близкие результаты (отличие в третьем знаке после запятой). Аргументирована возможность применения метода конечных объемов для расчета параметров цепей со сложной геометрией по критерию ограничения уровня интенсивности электрического поля вблизи проводов, например, если использовать в качестве критерия оптимизации допустимую интенсивность электрического поля на поверхности проводника. Изменения расстояния между проводами расщепленной фазы приводит к нелинейному изменению значения емкостных коэффициентов проводов фазы. Подтверждена возможность использования приближенных формул для определения погонных параметров длинных линий через эквивалентный радиус расщепленной фазы традиционного конструктивного исполнения.

**Ключевые слова:** уравнения Максвелла, численный метод, распределение электрического поля, эквивалентный радиус, емкостные коэффициенты, параметры линии.

## ВВЕДЕНИЕ

Электрические линии являются важным функциональным элементом современных электроэнергетических систем. Повышение их номинального напряжения позволяет снизить потери энергии в процессе передачи мощности и повысить их натуральную мощность [1, 2]. Одновременно, при повышении номинального напряжения имеет место рост напряженности электрического поля на поверхности проводов фаз. Рост напряженности электрического поля вблизи проводов фаз приводит к интенсификации электрических разрядов с поверхности проводов, а, следовательно, и к росту потерь энергии в линии [3].

Для уменьшения потерь от разрядов с поверхности проводов, фазы высоковольтных линий выполняются расщепленными, то есть, состоящими из пучка проводов для которых выполняется условие снижения интенсивности электрического поля на каждом из них. Таким образом, достигается поставленная цель – снижение потерь линии из-за электрических разрядов с поверхности

проводов фаз. Эти разряды получили название коронного разряда [4].

Расщепление провода фазы на пучок проводов приводит к необходимости использования аппроксимирующих формул для вычисления погонных параметров линий электропередач [5], а использование различных конструкций, особенно расщепленных фаз, может привести к определенным трудностям при вычислении их погонных параметров традиционными подходами.

Следует отметить, что развитие вычислительной техники открыло новые возможности для решения полевых задач при определении характеристик и значений параметров энергетических объектов с учетом их реальной геометрии. Также, результаты, полученные численными методами, могут служить мерой для определения области применимости традиционных методов, которые представляются более простыми для практического применения. В свою очередь, результаты вычислений электрических параметров апробированными методами могут быть использованы при оценке

применимости и точности новых численных методов расчета параметров электроэнергетического оборудования. Численные методы при апробации их работоспособности могут содействовать решению более широкого круга задач по сравнению с традиционными расчетными методами, в том числе и определения эквивалентных параметров схем замещения линий электропередач, которые используются при расчете режимов энергосистем [9, 10].

Цель данной работы состоит в разработке математической модели трехфазной линии электропередачи с фазами из расщепленных проводов и в оценке точности определения ее емкостных параметров по эквивалентному диаметру расщепленной фазы и методом конечных объемов по результатам вычисления распределения статического электрического поля на основе уравнений Максвелла.

### I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Математическая модель распространения электромагнитной энергии по многопроводной трехфазной высоковольтной линии электропередачи представляет собой систему дифференциальных уравнений для векторов напряжения  $\mathbf{u}(x,t)$  и тока  $\mathbf{i}(x,t)$ .

$$L \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + R\mathbf{i} = 0, \quad (1)$$

$$C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + G\mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Показано [1, 2], что уравнения (1) и (2) являются следствием уравнений Максвелла для многопроводной линии электропередачи.

Областью решения задачи и областью определения неизвестных вектор-функций тока и напряжения является прямоугольник  $D = \{(x,t) : x \in (0,l), t \in (0,T_{\max})\}$ , где  $l$  – длина линии,  $T_{\max}$  – максимальное время расчета вектор-функций  $\mathbf{u}(x,t)$  и  $\mathbf{i}(x,t)$ . В  $n$ -проводной линии вектор-функции  $\mathbf{u}(x,t)$  и  $\mathbf{i}(x,t)$  имеют по  $n$  компонент (матрицы (3) и (4)), а в уравнениях (1) и (2) буквами  $L$ ,  $C$ ,  $R$  и  $G$  обозначены симметричные матрицы размерности  $(n \times n)$  погонных индуктивности

(5), емкости (6), сопротивления проводов (7) и проводимости изоляции (8):

$$\mathbf{u}(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ \dots \\ u_n(x,t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{i}(x,t) = \begin{pmatrix} i_1(x,t) \\ i_2(x,t) \\ \dots \\ i_n(x,t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & G_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь и далее жирным шрифтом обозначены векторные объекты.

Система уравнений (1) и (2) представляет собой систему дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа.

Для получения единственного решения к уравнениям (1) и (2) следует добавить начальные условия при  $t=0$  и граничные условия при  $x=0$  и  $x=l$ .

При рассмотрении этой задачи будем полагать, что в начальный момент  $t=0$  в линии отсутствуют напряжения и токи, т.е

$$u(x,0) = i(x,0) = 0, x \in [0,l], \quad (9)$$

а граничные условия на входе линии при  $x = 0$  заданы для напряжения, а на выходе линии при  $x = l$  имеем нагрузку, которая определяется падением напряжения на сопротивлении  $R_s$  от протекающего тока  $i(l,t)$ , т.е.

$$u(0,t) = U_0(t), u(l,t) = R_s i(l,t).$$

## II. ТРЕХФАЗНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ С РАСЩЕПЛЕННЫМИ ФАЗАМИ

При конструировании ЛЭП сверхвысокого напряжения (напряжения выше 500 кВ) каждая фаза подвергается расщеплению, т.е. представляет собой пучок из нескольких проводов. Основными назначениями расщепления фаз является увеличение пропускной способности и снижение (ограничение) коронирования ВЛ до экономически приемлемого уровня.

Увеличение пропускной способности достигается при неизменном номинальном напряжении и сечении проводов фаз путем снижения индуктивного сопротивления ЛЭП за счет расщепления провода фаз [10]. Другим важным фактором для характеристик электрических линий высокого напряжения, является эффект улучшения распределения электрического поля под электрической линией [11, 12], распределения магнитного поля при сближении проводов фаз трехфазной линии (компактные линии) [13, 14]. Эти исследования проводятся в настоящее время с применением численных методов определения распределения электрических и магнитных полей для трехфазных линий [11-14]. Аналогичные исследования проводились также и авторами в более ранних работах.

На рис. 1 и в таблице 1 приведены данные о геометрических размерах электрических линий напряжением в 500, 750 и 1150 кВ с расщепленными фазами, Фазы этих линий могут состоять из 3, 5 и 8 проводов в пучке.

При расчете параметров фаз таких линий используют приближенные формулы, поскольку реальный проводник фазы замещается эквивалентным проводником.

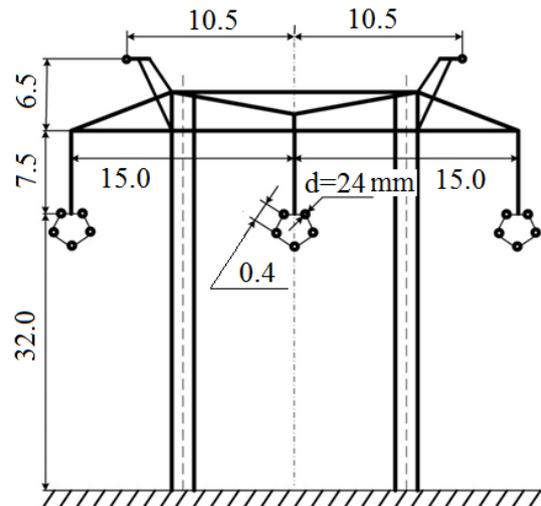


Рис.1. Линия напряжения 500 кВ с фазами с расщепленными проводами.  
Fig.1. 500 kV voltage line with phases with split wires.

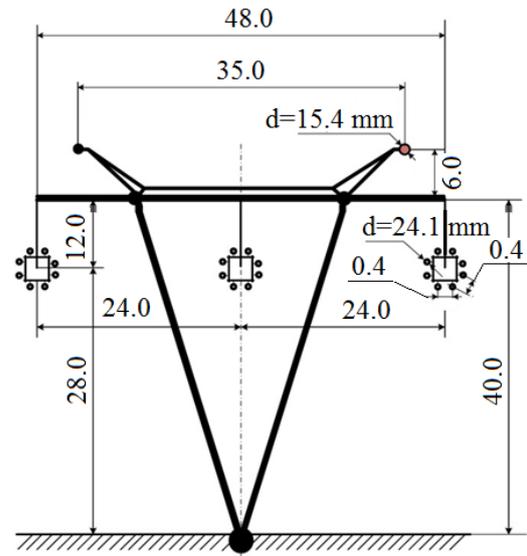


Рис.2. Линия напряжения 750 кВ с фазами с расщепленными проводами.  
Fig.2. 750 kV voltage line with phases with split wires.

Эквивалентный расчетный проводник имеет радиус  $r_{ech}$ , который вычисляется по формуле [15, 16]

$$r_{ech} = \sqrt[n]{r_{con} a^{n-1}} \quad (1)$$

где  $r_{con}$  и  $a$  – радиус одного провода и расстояние между проводами в пучке.

Таблица 1. (Table 1) Геометрические параметры расщепленной фазы высоковольтных линий электропередач.  
Geometric parameters of the split phase of high-voltage power lines.

Номинальное напряжение, (Rated voltage) kV	500			750			1150		
Число проводов в расщепленной фазе, (Number of wires in the split phase) n	3			5			8		
Тип провода (Wire type)	AC400/51			AFC300/39			AC300/48		
Диаметр провода (Wire diameter) $d_{con}$ , mm	27.5			24.0			24.1		
Радиус провода (Wire radius) $r_{con}$ , mm	13.75			12.0			12.05		
Расстояние между проводами, (Wire spacing) $a$ , mm	400.0	500.0	600.0	400.0	500.0	600.0	400.0	500.0	600.0
Эквивалентный радиус фазы (Equivalent phase radius) $r_{ech}$ , mm	130.1	150.9	170.4	198.4	237.1	274.4	258.2	313.8	368.6

В работе [17] приведены формулы для вычисления элементов матрицы  $C = \alpha^{-1}$ , где  $\alpha$  – матрица потенциальных коэффициентов.

Для определения коэффициентов  $\alpha_{ki}$ ,  $k, i = 1, n$  принимается, что все заряды, кроме заряда с номером  $k$ , равны нулю, т.е.

$$Q_i = \begin{cases} Q_k \neq 0, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

В этом случае, предполагается, что поле заряженного провода будет таким же, как поле одиночного провода, протянутого над поверхностью земли.

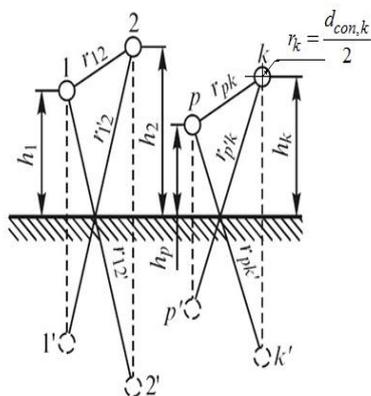


Рис.3. Провода, протянутые над землей и их зеркальные отражения.  
Fig.3. Overhead wires and their mirror images.

На рис 3 приведено расположение проводников электрической линии в случае применения метода зеркального отражения при расчете значения их потенциальных коэффициентов. Такая трактовка проблемы правомерна, если принимается гипотеза, что искажением поля рассматриваемого провода вследствие существования других проводов можно пренебречь ввиду малости их сечений и отсутствии на них заряда.

Для принятой гипотезы, появляется возможность вычисления значений потенциальных коэффициентов  $\alpha_{kk}$  и  $\alpha_{kp}$ ,  $k, p = 1, n$  (рис. 3), используя известное точное решение для одного провода:

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2h_k}{r_k} \text{ и}$$

$$\alpha_{kp} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_{p'k}}{r_{pk}} \text{ при } p \neq k. \quad (11)$$

где  $\epsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость;  $l, r_k$  – длина и радиус провода;  $r_{pk}$  – расстояние между проводами с номерами  $p$  и  $k$ ;  $r_{p'k}$  – расстояние между проводом с номером  $k$  и зеркальным отображением провода с номером  $p$ .

В случае, когда элементы матрицы  $C$  из (6) вычисляются по приближенным

формулам, приведенным в [17], формула (10) обеспечивает правильное вычисление электрической энергии  $W_e$  в линии:

$$W_e = \frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij} u_i u_j, \quad (12)$$

где  $C_{ij}$  и  $u_i$  – элементы матрицы  $C$  из (6) и вектора  $\mathbf{u}$  из (3).

### III. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ ТОЧНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим вычисление точных значений потенциальных коэффициентов, представленных формулами (11) путем решения уравнений Максвелла в области, окружающей провода воздушной линии. Для решения задачи используем метод конечных объемов, который достаточно полно описан в работах авторов опубликованных в других номерах данного журнала (см., например, 1(15), 2011; 2(28), 2015; 3(38), 2018).

Сущность метода конечных объемов рассмотрим на основе решения задачи определения двумерного распределения потенциала  $u(x, y)$  электростатического поля в многосвязной области  $\Omega$ , в которой абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_a(x, y)$  принимает кусочно-постоянное значение. Такая формулировка является частным случаем трехмерной задачи для бесконечного в направлении оси  $z$  цилиндра с поперечным сечением  $\Omega$ . Функция  $u(x, y)$  внутри области  $\Omega$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\operatorname{div}(\epsilon_a \operatorname{grad} u) = -\sigma(x, y), \quad (13)$$

где  $\sigma(x, y)$  – плотность распределения свободных зарядов.

Если в области  $\Omega$  свободные заряды не присутствуют, то уравнение (13) превращается в уравнение Лапласа  $\operatorname{div}(\epsilon_a \operatorname{grad} u) = 0$ . На границе  $\Gamma = \partial\Omega$  области  $\Omega$  значения  $u(x, y)$  считаются известными

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y). \quad (14)$$

Вектор напряженности поля  $\vec{E}$  определяется через потенциал  $u$  по формуле

$\vec{E} = -\operatorname{grad} u$ , а вектор электрического смещения  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ . На границах раздела разнородных сред выполняются условие непрерывности:  $[u] = 0$  и  $[(\vec{D}, \vec{n})] = 0$ , где квадратными скобками обозначена разность предельных значений слева и справа от границы раздела, а  $\vec{n}$  – вектор нормали к ней.

Для численного решения сформулированной задачи необходимо разбить область  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$  на конечное множество малых треугольников. Все их вершины образуют дискретное множество узлов сетки, которая накладывается на континуум  $\bar{\Omega}$ . Сетка строится таким образом, чтобы стороны треугольников совпадали с границей раздела разнородных сред. Множество треугольников сетки обозначают как  $T_h$ , где  $h$  – максимальная длина всех сторон треугольников.

Далее, необходимо ввести дуальную сетку  $T_h^*$ , которая состоит из так называемых ячеек Вороного (рис. 4,а).

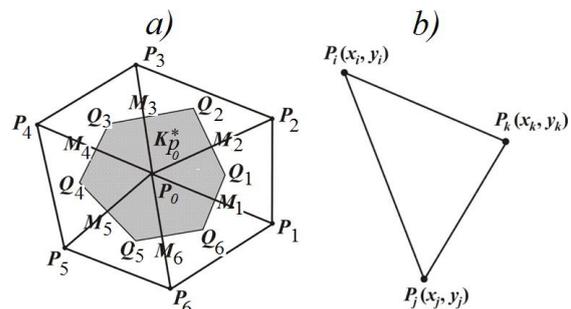


Рис. 4. Окрестность узла сетки  $P_0$  и ячейка Вороного  $K_{P_0}^*$  (а) и треугольник  $\Delta P_i P_j P_k$  (б).

Fig. 4. The neighborhood of the grid node  $P_0$  and the Voronoi cell  $K_{P_0}^*$  (a), triangle  $\Delta P_i P_j P_k$  (b).

Вершины ячейки Вороного  $K_{P_0}^*$  некоторого узла  $P_0$ , обозначенные буквами  $Q_i$ , являются центрами окружностей, описанных около треугольников, имеющих в качестве вершины точку  $P_0$ .

В качестве приближенного решения задачи (5.8), (5.9) будем рассматривать кусочно-линейную функцию  $u_h(x, y)$ , которая должна быть непрерывной в области  $\bar{\Omega}$  и линейной на каждом треугольнике  $K \in T_h$ . На множестве треугольников  $T_h$

функцию  $u_h(x, y)$  можно задать следующим образом.

Треугольник  $K = \Delta P_i P_j P_k$  (рис. 4,b) является некоторым элементом множества  $T_h$  и  $P(x, y)$  – произвольная точка этого элемента. В этом треугольнике для каждой вершины вводятся функции формы  $N_i(x, y)$ ,  $N_j(x, y)$  и  $N_k(x, y)$ , которые удовлетворяют условиям: функции являются линейными и в вершинах треугольника принимают значения 1 или 0:

$$\begin{aligned} N_i(P_i) &= \mathbf{1}; N_i(P_j) = N_i(P_k) = \mathbf{0}; \\ N_j(P_j) &= \mathbf{1}; N_j(P_i) = N_j(P_k) = \mathbf{0}; \\ N_k(P_k) &= \mathbf{1}; N_k(P_i) = N_k(P_j) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Функции формы можно представить и в явном виде через координаты вершин треугольника

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \\ a_i &= x_j y_k - x_k y_j, b_i = y_j - y_k, c_i = x_k - x_j; \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y), \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k, b_j = y_k - y_i, c_j = x_i - x_k; \\ N_k(x, y) &= \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y), \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i, b_k = y_i - y_j, c_k = x_j - x_i, \end{aligned}$$

где через  $A$  обозначена площадь треугольника, для которого выполняется соотношение:

$$2A = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & x_i & y_i \\ \mathbf{1} & x_j & y_j \\ \mathbf{1} & x_k & y_k \end{vmatrix}.$$

Используя функции формы, для каждого узла (внутреннего и граничного) сетки введем базисную функцию  $\varphi_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n_1$ , где через  $n$  и  $n_1$  обозначены соответственно число внутренних и всех узлов сетки. Функция  $\varphi_i(x, y)$  является кусочно-линейной, т.е. непрерывной и

линейной на каждом треугольнике со значением, равным единице в узле  $P_i$  и равным нулю во всех остальных узлах. Тогда приближенное решение  $u_h(x, y)$  может быть представлено в виде линейной комбинации базисных функций

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^{n_1} u_i \varphi_i(x, y). \quad (15)$$

В силу кусочно-линейного характера построенного базиса  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_1}$  функции  $u_h$  являются элементами пространства Соболева  $u_h \in W_2^1(\Omega)$ . Нетрудно проверить, что коэффициенты  $u_i$  в уравнении (15) равны искомым.

В методе конечных объемов применяется обобщенный подход Галеркина, который заключается в том, что в условиях ортогональности используются базисные функции  $\psi_k(x, y)$  пространства  $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ , определяемого следующим образом. Введем новые базисные функции  $\psi_k(x, y)$  для дуальной сетки  $T_h^*$  по правилу: функция  $\psi_k(x, y)$  принимает постоянные значения равные единице в ячейке Вороного для внутреннего узла  $P_k$  и равна нулю в остальной области. Тогда условие ортогональности по Галеркину с функциями  $\psi_k(x, y)$  принимает вид

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\varepsilon_a \operatorname{grad} u_h) \psi_k ds = - \int_{\Omega} \sigma \psi_k ds, \quad k = \overline{1, n} \quad (16)$$

или в силу того, что функция  $\psi_k(x, y)$  отлична от нуля только в  $K_{P_0}^*$

$$\int_{K_{P_0}^*} \operatorname{div}(\varepsilon_a \operatorname{grad} u_h) ds = - \int_{K_{P_0}^*} \sigma ds, \quad (17)$$

где  $K_{P_0}^*$  – ячейка Вороного для узла  $P_k$ .

Для получения системы линейных алгебраических уравнений для неизвестных значений функции  $u_h$  в узлах сетки по

методу конечных объемов необходимо рассмотреть в трехмерном пространстве с декартовыми координатами  $Oxyz$  уравнение Пуассона  $\operatorname{div}(\varepsilon_a \operatorname{grad} u) = -\sigma(x, y, z)$ . Последнее уравнение интегрируется по объему прямой призмы  $V_{P_0}^*$  с основанием, совпадающим с ячейкой  $K_{P_0}^*$  и высотой, равной единице и направленной по оси  $Oz$ . Таким образом, получаем:

$$\int_{V_{P_0}^*} \operatorname{div}(\varepsilon_a \operatorname{grad} u) dV = - \int_{V_{P_0}^*} \sigma(x, y, z) dV. \quad (18)$$

Объем такой призмы численно равен площади ее основания:  $V_{P_0}^* = K_{P_0}^*$ . Боковая поверхность призмы  $V_{P_0}^*$  состоит из прямоугольников с высотами, равными единице, площади которых численно совпадают с длинами сторон ячейки  $K_{P_0}^*$ . Пропуская промежуточные преобразования получим:

$$\int_{\partial K_{P_0}^*} \varepsilon_a \frac{\partial u}{\partial n} dl = - \int_{K_{P_0}^*} \sigma(x, y) dS \quad (19)$$

Таким образом, решение задачи (13), (14) по методу конечных объемов сводится к аппроксимации соотношения (19) для ячеек Вороного внутренних узлов разностной сетки.

Уравнение для узла  $P_0$  (рис. 4а) имеет следующий вид:

$$\alpha_0 u(P_0) + \sum_{i=1}^6 \alpha_i u(P_{i+1}) = -\sigma(P_0) S_0 \quad (20)$$

где

$$\alpha_i = \varepsilon_a (M_{i+1}) \frac{|Q_i Q_{i+1}|}{|P_0 P_{i+1}|}, \quad i = \overline{1,6}; \quad \alpha_0 = -\sum_{i=1}^6 \alpha_i$$

при выполнении условия ( $P_1 = P_7$ ,

$$M_1 = M_7, \quad Q_1 = Q_7).$$

Для каждого внутреннего узла сетки запишем уравнение вида (20), а для

граничных узлов используется условие (14). В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей.

Полученное в области  $\overline{\Omega}$  решение  $u_h(x, y)$  позволяет построить поле потока вектора напряженности  $\vec{E} = (E_x, E_y) = -\operatorname{grad} u$ . Обозначим через  $V$  поток вектора  $\vec{E}$ , проходящий через площадку, параллельную оси  $z$  и на поверхности которой выполняется условие:  $u(x, y) = \operatorname{const}$ . Функции  $u$  и  $V$  удовлетворяют уравнениям Коши-Римана

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (21)$$

Поэтому, изолинии  $u(x, y) = \operatorname{const}$  и  $V(x, y) = \operatorname{const}$  образуют взаимно ортогональные семейства. Функция  $V(x, y)$  может быть получена путем вычисления контурного интеграла от функции  $u(x, y)$

$$V(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy \right), \quad (22)$$

где  $x_0, y_0$  – координаты произвольной точки из области  $\Omega$ , а путь интегрирования расположен внутри нее.

В случае многосвязной области путь интегрирования также не должен пересекать разрезы области, сводящей ее к односвязной структуре.

Емкость  $C$  между двумя проводящими телами вычисляется по формуле

$$C = \frac{q}{u_1 - u_2} \quad (23)$$

где  $(u_1 - u_2)$  – разность потенциалов этих тел.

Заряд  $q$  тела, расположенного внутри некоторой трехмерной области  $V$ , вычисляется в соответствии с теоремой

Гаусса как интеграл по поверхности  $S = \partial V$  от вектора напряженности  $\vec{E}$ :

$$q = \varepsilon \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\varepsilon \int_S \text{gradu} \cdot d\vec{S} = -\varepsilon \int_S (\text{gradu} \cdot \vec{n}) dS = -\varepsilon \int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (25)$$

где  $S$  – произвольная поверхность, содержащая в себе заряженное тело;  $\vec{n}$  – вектор внешней нормали к ней;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость.

#### IV. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ

С целью иллюстрации применения метода конечных объемов для расчета параметров линии с расщепленными проводниками в фазах была выбрана электрическая линия напряжения 750 кВ с расщепленной фазой на 5 проводов. Геометрические размеры проводов расщепленной фазы приведены в таблице 1. Основные геометрические параметры линии даны на рис. 2.

Рассмотрены два варианта расположения проводов в расщепленной фазе: расстояние между проводами – 40 см и второй вариант, когда провода сближены на расстояние 5 см.

Для численного решения задачи была построена треугольная сетка с 232768 узлами, с целью определения распределения электрического поля вокруг расщепленной фазы и вычисления по этому распределению собственных и взаимных емкостных коэффициентов  $\beta_{ij}$  проводов электрической линии. Фрагменты этой сетки в окрестности расщепленной фазы приведены на рис. 5.

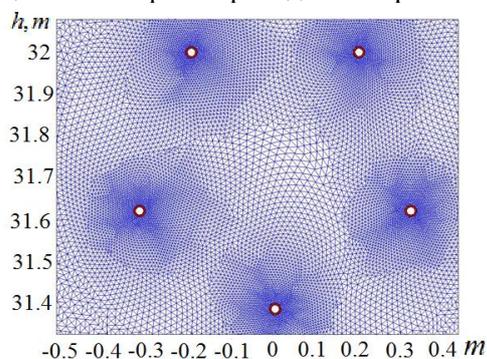


Рис. 5. Треугольная сетка в окрестности расщепленной фазы.

Fig. 5. Triangular grid in the vicinity of the split phase.

На рис.6 приведена схема расположения проводов расщепленных фаз с их сквозной нумерацией.

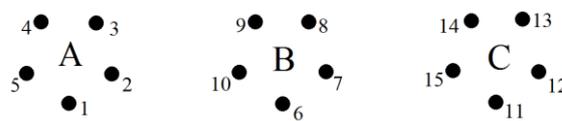


Рис. 6. Взаимное расположение фаз и проводников расщепленных фаз.  
Fig. 6. Mutual arrangement of phases and conductors of split phases.

Для расположения проводов (рис. 6) и геометрии линии напряжения 500 кВ (рис.1) вычислены значения собственных и взаимных емкостных коэффициентов проводов  $\beta_{ij}$  расщепленных фаз по формуле (11) и методом конечных объемов.

Расчетные значения емкостных коэффициентов приведены в таблицах П1-П4 Приложения, которые имеют форму квадратной матрицы 15x15. Значения емкостных коэффициентов  $\beta_{ij}$  получены из расчета распределения электрического поля (по методике, изложенной в разделе III) и по приближенной формуле (11), используя формулу  $\beta_{ij} = \frac{1}{\alpha_{ij}}$  для двух вариантов

расположения проводов в расщепленной фазе  $a = 40$  см и  $a = 5$  см. Эти вычисления выполнены с целью оценки точности традиционного метода (формула (11)) и метода конечных объемов.

Полученные результаты расчетов коэффициентов матрицы емкостных коэффициентов  $\beta$ , показывают, что в случае расстояний между проводами в 40 см и даже в 5 см значения коэффициентов матрицы емкостных коэффициентов  $\beta$ , незначительно отличаются от значений, полученных по приближенным формулам (11), когда используют для расчета потенциальных коэффициентов эквивалентный радиус расщепленной фазы. Если полагать, что формула (11), которая в целом подтверждается практикой, приводит к правильным результатам, то ей можно присвоить статус тестовой (эталонной) модели, которую можно использовать для проверки точности и работоспособности

численных методов расчета параметров длинных линий.

С этой точки зрения, численные данные таблиц П1-П4 Приложения подтверждают точность и работоспособность метода конечных объемов для определения параметров электрических линий, в том числе с расщепленными фазами. Отклонения вычисленных значений емкостных коэффициентов по традиционному подходу, через эквивалентный радиус расщепленной фазы, и по методу конечных объемов проявляются только в третьем знаке после запятой. Эти результаты подтверждают высокую точность метода конечных объемов при расчете сложных по конфигурации электрических полей. Результат сопоставительного анализа служит обоснованием правомерности применимости метода конечных объемов для расчета электрического поля в оборудовании со сколь угодно сложной пространственной геометрией.

Сближение проводов в расщепленных фазах приводит к изменению значений емкостных коэффициентов  $\beta_{ij}$ . Наиболее сильно изменяются значения взаимных емкостных коэффициентов  $\beta_{ij}$  проводов из расщепленной фазы. При этом, следует ожидать измененной плотности зарядов на поверхности проводов расщепленной фазы. В итоге, это может повлиять на условия появления коронного разряда на поверхности проводов расщепленной фазы. Отсюда следует, что применение метода конечных объемов сможет содействовать решению задачи оптимизации расположения проводов в расщепленной фазе, например, по критерию уменьшения потерь на корону.

Технологически, решение задачи уменьшения потерь на корону, сводится к определению распределения напряженности электрического поля вблизи проводов расщепленной фазы.

Полученные значения напряженности электрического поля принципиально позволяют решить задачу оптимизации расположения проводов в расщепленной фазе по критерию ограничения интенсивности короны. Отметим только, что оптимизация конструкции расщепленной фазы является другой самостоятельной задачей, которую мы не рассматриваем в данной работе.

## ВЫВОДЫ

1. Предложена математическая модель многопроводной линии электропередачи с расщепленными фазами, которая позволяет исследовать влияние геометрического расположения проводов на погонные параметры линии.
2. Получены численные значения коэффициентов матрицы емкостных коэффициентов для линии с расщепленными фазами путем решения статической задачи для уравнений Максвелла. Результаты вычислений методом конечных объемов для тестовой задачи хорошо согласуются с данными полученными с помощью эквивалентного радиуса расщепленной фазы, что позволяет рекомендовать предложенный метод для расчета параметров объектов со сложной геометрией.
3. Показано, что для расположения проводов в расщепленной фазе, которое используется на практике, значения емкостных коэффициентов могут быть вычислены с достаточной точностью, используя простые приближенные формулы для расчета потенциальных коэффициентов.

## ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

- [1] Postolatiy V. M. Kompaktnyye upravlyayemyye samokompensiruyushchiyesya vysokovol'tnyye linii elektropredachi peremennogo toka (v trekh chastyakh) [Compact controlled self-compensated high-voltage AC transmission lines (in three parts)]. Kishinev: Tipografiya AN Molodvy, 2017. -732 s. ISBN 978-9975-62-404-6
- [2] Postolatiy V. M., Bykova E. V., Suslov V. M., Shakaryan Yu. G., Timashova L. V., Kareva S. N. Upravlyayemyye kompaktnyye linii elektropredachi peremennogo toka [Managed compact AC power lines]. Proceedings of International conference "ENERGY OF MOLDOVA – 2012. Regional aspects of development" October 4-6, 2012 - Chisinau, Republic of Moldova. –pp. 252-273. ISBN 978-9975-62-324-7
- [3] RD 34.20.172; SO 153-34.20.172. Rukovodyashchiye ukazaniya po uchetu poter' na koronu i pomekh ot korony pri vybore provodov vozdushnykh liniy elektropredachi peremennogo toka 330 – 750 kV i postoyannogo toka. [Guidelines for taking corona losses and interference from the corona when choosing wires of overhead power lines of alternating current 330 - 750 kV and direct current].. <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4294817/4294817291.htm> (accessed 13.05.2019).

- [4] Dragan G. Tehnica tensiunilor înalte [The High Voltage Technique]. Volumul II. București: Editura Academiei Române. Editura AGIR, 2001. – 732p. ISBN973-27-0816-6.
- [5] Aleksandrov G.N. Koronnyy razryad na liniyakh elektroperedachi [Corona discharge on power lines]. - Moskva ; Leningrad : Energiya, 1964. - 228 s.
- [6] Kane Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media,” *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2001, vol. 14, pp. 302–307.
- [7] Taflove A and Brodwin M. E. “Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations,” *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 2004, vol. 23. pp. 623–630.
- [8] Weeks W.T. Multiconductor Transmission-line Theory in the TEM Approximation. IBM Journal of Research and Development. Vol. 16, Issue 6, 1972, p. 604-611
- [9] Paul Clayton R. Analysis of multiconductor transmission lines. 2nd Ed. Wiley-IEEE Press, 2007, 780 p.
- [10] Transmission Line Parameters. [https://www.unioviado.es/pcasielles/uploads/proy ectantes/cosas\\_lineas.pdf](https://www.unioviado.es/pcasielles/uploads/proy ectantes/cosas_lineas.pdf). (accessed 17.05.2019)
- [11] Razavipour S.S., Jahangiri M., Sadeghipoor H. Electrical Field around the overhead Transmission Lines. World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Physical and Mathematical Sciences, Vol:6, No:2, 2012. –pp.168-171. ISNI:0000000091950263
- [12] Chen Han and Yuchen Chen. Modeling and Simulation Analysis of Power Frequency Electric Field of UHV AC Transmission Line. (IJACSA) International Journal of Advanced Computer Science and Applications, Vol. 6, No. 1, 2015. – pp. 77-81. ISSN: 2156-5570
- [13] Fabio Bignucolo, Massimiliano Coppo, Andrea Savio and Roberto Turri. Use of Rod Compactors for High Voltage Overhead Power Lines Magnetic Field Mitigation. *Energies* 2017, 10, 1381;-19p. doi:10.3390/en10091381. <https://www.mdpi.com/1996-1073/10/9/1381/pdf>
- [14] Juan Carlos Bravo-Rodríguez, Juan Carlos del-Pino-López and Pedro Cruz-Romero. A Survey on Optimization Techniques Applied to Magnetic Field Mitigation in Power Systems. *Energies* 2019, 12, 1332; doi:10.3390/en12071332. <https://www.mdpi.com/journal/energies> (accessed 73.05.2019)
- [15] Tikhodeyev N.N. Peredacha elektricheskoy energii ransmission of electrical energy. []. L.: 1984.– 248 s.Тиходеев Н.Н.
- [16] Vennikov V.A., Stroyeva V.A. Elektricheskiye sistemy. Elektricheskiye seti [Electrical systems. Electricity of the net.]. M.: Vyssh. shk., 1998.– 511 s.
- [17] Demirchyan K.S., Korovkin N. V., Chechurin V.L. Teoreticheskiye osnovy elektrotekhniki [Theoretical foundations of electrical engineering]. Tom 3, SPb: Piter, 2004. 364 s.

### Сведения об авторах.



**Берзан Владимир Петрович**, доктор хабилитат технических наук, зам.директора по науке Института энергетики. Область научных интересов: энергетика, установившиеся и переходные процессы в электрических цепях, математическое моделирование, диагностика энергетического оборудования. Ул. Академическая, 5, MD2028, Кишинэу, Республика Молдова, E-mail: [berzan@ie.asm.md](mailto:berzan@ie.asm.md), ORCID ID: [0000-0001-7645-7304](https://orcid.org/0000-0001-7645-7304)



**Пацюк Владимир Ильич**, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института энергетики, доцент Молдавского Государственного Университета. Области научных интересов: математическая физика, численный анализ, теоретическая механика и теоретическая электротехника. Ул. Академическая, 5, MD2028, Кишинэу, Республика Молдова, E-mail: [patsiuk@mail.ru](mailto:patsiuk@mail.ru), ORCID ID: 0000-0002-7520-2868



**Рыбакова Галина Алексеевна**, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института энергетики, доцент Молдавского Государственного Университета. Области научных интересов: математическая физика, численный анализ, механика деформированного тела. Ул. Академическая, 5, MD2028, Кишинэу, Республика Молдова, E-mail: [gal\\_rib@mail.ru](mailto:gal_rib@mail.ru), ORCID ID: 0000-0001-7262-0629

Приложение I. Результаты вычислений емкостных коэффициентов проводов ВЛ 750 кВ с расщепленными фазами. Annex. Capacitance coefficients of 750 kV overhead line with split phases.

Таблица П1  
Table A1

Значения собственных и взаимных емкостных коэффициентов  $\beta_{ij}$  проводов расщепленной фазы вычисленных по формуле (11) при  $a = 40$  см  
The values of the intrinsic and mutual capacitive coefficients  $\beta_{ij}$  of the wires of the split phase calculated by (11) with  $a = 40$  cm

$i/j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	12.563	-3.567	-1.624	-1.628	-3.573	-0.102	-0.091	-0.095
2	-3.567	12.567	-3.569	-1.626	-1.625	-0.112	-0.100	-0.106
3	-1.624	-3.569	12.560	-3.576	-1.628	-0.108	-0.098	-0.106
4	-1.628	-1.626	-3.576	12.553	-3.578	-0.096	-0.088	-0.095
5	-3.573	-1.625	-1.628	-3.578	12.555	-0.092	-0.084	-0.089
6	-0.102	-0.112	-0.108	-0.096	-0.092	12.584	-3.549	-1.604
7	-0.091	-0.100	-0.098	-0.088	-0.084	-3.549	12.583	-3.552
8	-0.095	-0.106	-0.106	-0.095	-0.089	-1.604	-3.552	12.579
9	-0.109	-0.122	-0.121	-0.108	-0.101	-1.604	-1.606	-3.554
10	-0.113	-0.126	-0.122	-0.108	-0.103	-3.549	-1.604	-1.606
11	-0.036	-0.039	-0.039	-0.037	-0.035	-0.102	-0.113	-0.109
12	-0.035	-0.038	-0.038	-0.036	-0.034	-0.092	-0.103	-0.101
13	-0.037	-0.040	-0.041	-0.039	-0.036	-0.096	-0.108	-0.108
14	-0.039	-0.042	-0.044	-0.041	-0.038	-0.108	-0.122	-0.121
15	-0.039	-0.042	-0.042	-0.040	-0.038	-0.112	-0.126	-0.122

Продолжение Таблицы 1.  
Continuation of Table 1.

$i/j$	9	10	11	12	13	14	15
1	-0.109	-0.113	-0.036	-0.035	-0.037	-0.039	-0.039
2	-0.122	-0.126	-0.039	-0.038	-0.040	-0.042	-0.042
3	-0.121	-0.122	-0.039	-0.038	-0.041	-0.044	-0.042
4	-0.108	-0.108	-0.037	-0.036	-0.039	-0.041	-0.040
5	-0.101	-0.103	-0.035	-0.034	-0.036	-0.038	-0.038
6	-1.604	-3.549	-0.102	-0.092	-0.096	-0.108	-0.112
7	-1.606	-1.604	-0.113	-0.103	-0.108	-0.122	-0.126
8	-3.554	-1.606	-0.109	-0.101	-0.108	-0.121	-0.122
9	12.579	-3.552	-0.095	-0.089	-0.095	-0.106	-0.106
10	-3.552	12.583	-0.091	-0.084	-0.088	-0.098	-0.100
11	-0.095	-0.091	12.563	-3.573	-1.628	-1.624	-3.567
12	-0.089	-0.084	-3.573	12.555	-3.578	-1.628	-1.625
13	-0.095	-0.088	-1.628	-3.578	12.553	-3.576	-1.626
14	-0.106	-0.098	-1.624	-1.628	-3.576	12.560	-3.569
15	-0.106	-0.100	-3.567	-1.625	-1.626	-3.569	12.567

Таблица П2  
Table A2

Значения собственных и взаимных емкостных коэффициентов  $\beta_{ij}$  проводов расщепленной фазы вычисленных по методу конечных объемов при  $a = 40$  см  
The values of the intrinsic and mutual capacitive coefficients  $\beta_{ij}$  of the wires of the split phase calculated by the finite volume method with  $a = 40$  cm

$i/j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	12.564	-3.567	-1.624	-1.627	-3.573	-0.101	-0.091	-0.095
2	-3.567	12.567	-3.568	-1.626	-1.624	-0.111	-0.100	-0.106
3	-1.623	3.5689	12.561	-3.576	-1.627	-0.108	-0.097	-0.105
4	-1.627	-1.625	-3.575	12.554	-3.578	-0.095	-0.087	-0.094
5	-3.572	-1.625	-1.627	-3.577	12.556	-0.092	-0.084	-0.088
6	-0.102	-0.111	-0.108	-0.096	-0.092	12.584	-3.548	-1.604
7	-0.091	-0.100	-0.097	-0.088	-0.084	-3.549	12.583	-3.551
8	-0.095	-0.106	-0.106	-0.094	-0.089	-1.604	-3.551	12.579
9	-0.109	-0.121	-0.120	-0.107	-0.100	-1.604	-1.605	-3.553
10	-0.113	-0.125	-0.122	-0.108	-0.103	-3.549	-1.604	-1.605
11	-0.036	-0.038	-0.039	-0.036	-0.034	-0.101	-0.113	-0.108
12	-0.034	-0.037	-0.038	-0.036	-0.033	-0.092	-0.103	-0.100
13	-0.036	-0.039	-0.041	-0.039	-0.036	-0.095	-0.108	-0.107
14	-0.039	-0.042	-0.043	-0.041	-0.038	-0.108	-0.122	-0.120
15	-0.038	-0.042	-0.042	-0.039	-0.038	-0.112	-0.126	-0.121

Продолжение Таблицы П2.  
Continuation of the Table A2.

$i/j$	9	10	11	12	13	14	15
1	-0.108	-0.113	-0.036	-0.035	-0.037	-0.039	-0.038
2	-0.122	-0.125	-0.038	-0.037	-0.039	-0.042	-0.041
3	-0.120	-0.122	-0.039	-0.038	-0.040	-0.043	-0.042
4	-0.107	-0.108	-0.037	-0.035	-0.038	-0.0401	-0.039
5	-0.101	-0.103	-0.035	-0.033	-0.035	-0.038	-0.037
6	-1.604	-3.549	-0.101	-0.092	-0.095	-0.107	-0.111
7	-1.605	-1.604	-0.113	-0.103	-0.108	-0.122	-0.125
8	-3.554	-1.605	-0.108	-0.100	-0.107	-0.120	-0.122
9	12.579	-3.551	-0.095	-0.089	-0.095	-0.105	-0.106
10	-3.552	12.584	-0.090	-0.083	-0.088	-0.098	-0.100
11	-0.095	-0.090	12.564	-3.572	-1.627	-1.624	-3.567
12	-0.089	-0.084	-3.573	12.556	-3.578	-1.628	-1.624
13	-0.094	-0.087	-1.627	-3.578	12.553	-3.576	-1.625
14	-0.105	-0.097	-1.624	-1.627	-3.575	12.561	-3.569
15	-0.105	-0.100	-3.567	-1.624	-1.626	-3.568	12.567

Таблица ПЗ  
Table A3

Значения собственных и взаимных емкостных коэффициентов  $\beta_{ij}$  проводов расщепленной фазы вычисленных по формуле (11) при  $a = 5$  см  
The values of the intrinsic and mutual capacitive coefficients  $\beta_{ij}$  of the wires of the split phase calculated by (11) with  $a = 5$  cm

$i/j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	30.110	-12.495	-1.752	-1.753	-12.496	-0.060	-0.058	-0.059
2	-12.495	30.110	-12.495	-1.753	-1.752	-0.062	-0.060	-0.061
3	-1.752	-12.495	30.109	12.497	1.753	-0.061	-0.060	-0.061
4	-1.753	-1.753	-12.497	30.108	-12.497	-0.059	-0.058	-0.059
5	-12.496	-1.752	-1.753	-12.497	30.109	-0.058	-0.057	-0.058
6	-0.060	-0.062	0.061	-0.059	-0.058	30.119	-12.486	-1.743
7	-0.058	-0.060	-0.060	-0.058	-0.057	-12.486	30.119	-12.487
8	-0.059	-0.061	-0.061	-0.059	-0.058	-1.743	-12.487	30.118
9	-0.062	-0.064	-0.063	-0.061	-0.060	-1.743	-1.743	-12.487
10	-0.062	-0.064	-0.064	-0.061	-0.060	-12.486	-1.743	-1.743
11	-0.025	-0.026	-0.026	-0.025	-0.025	-0.060	-0.062	-0.062
12	-0.025	-0.026	-0.026	-0.025	-0.025	-0.058	-0.060	-0.060
13	-0.025	-0.026	-0.026	-0.026	-0.025	-0.059	-0.061	-0.061
14	-0.026	-0.027	-0.027	-0.026	-0.026	-0.061	-0.064	-0.063
15	-0.026	-0.027	-0.027	-0.026	-0.026	-0.062	-0.064	-0.064

Продолжение Таблицы ПЗ.

Continuation of the Table A3.

$i/j$	9	10	11	12	13	14	15
1	-0.062	-0.062	-0.025	-0.025	-0.025	-0.026	-0.026
2	-0.064	-0.064	-0.026	-0.026	-0.026	-0.027	-0.027
3	-0.063	-0.064	-0.026	-0.026	-0.026	-0.027	-0.027
4	-0.061	-0.061	-0.025	-0.025	-0.026	-0.026	-0.026
5	-0.060	-0.060	-0.025	-0.025	-0.025	-0.026	0.026
6	-1.743	-12.486	-0.060	-0.058	-0.059	-0.061	-0.062
7	-1.743	-1.743	-0.062	-0.060	-0.061	-0.064	-0.064
8	-12.487	-1.743	-0.062	-0.060	-0.061	-0.063	-0.064
9	30.118	-12.487	-0.059	-0.058	-0.059	-0.061	-0.061
10	-12.487	30.119	-0.058	-0.057	-0.058	-0.060	-0.060
11	-0.059	-0.058	30.110	-12.496	-1.753	-1.752	-12.495
12	-0.058	-0.057	-12.496	30.109	-12.497	-1.753	-1.752
13	-0.059	-0.058	-1.753	-12.497	30.108	-12.497	-1.753
14	-0.061	-0.060	-1.752	-1.753	-12.497	30.109	-12.495
15	-0.061	-0.060	-12.495	-1.752	-1.753	-12.495	30.110

Таблица П4  
Table A4

Значения собственных и взаимных емкостных коэффициентов  $\beta_{ij}$  проводов расщепленной фазы вычисленных по методу конечных элементов при  $a = 40$  см  
The values of the intrinsic and mutual capacitive coefficients  $\beta_{ij}$  of the wires of the split phase calculated by the finite volume method with  $a = 40$  cm

$i/j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	30.111	-12.494	-1.752	-1.752	-12.495	-0.060	-0.058	-0.059
2	-12.495	30.111	-12.495	-1.752	-1.751	-0.061	-0.060	-0.060
3	-1.751	-12.495	30.109	12.497	1.753	-0.061	-0.059	-0.061
4	-1.752	-1.752	-12.496	30.109	-12.496	-0.059	-0.057	-0.058
5	-12.495	-1.752	-1.752	-12.496	30.109	-0.057	-0.056	-0.058
6	-0.060	-0.062	0.061	-0.059	-0.058	30.119	-12.485	-1.743
7	-0.058	-0.060	-0.059	-0.057	-0.056	-12.486	30.119	-12.486
8	-0.058	-0.061	-0.060	-0.058	-0.057	-1.743	-12.487	30.118
9	-0.061	-0.063	-0.063	-0.060	-0.059	-1.742	-1.743	-12.487
10	-0.061	-0.063	-0.063	-0.061	-0.060	-12.485	-1.742	-1.743
11	-0.025	-0.026	-0.025	-0.024	-0.024	-0.059	-0.062	-0.061
12	-0.025	-0.025	-0.025	-0.025	-0.025	-0.058	-0.060	-0.059
13	-0.025	-0.026	-0.025	-0.025	-0.024	-0.059	-0.061	-0.061
14	-0.026	-0.026	-0.026	-0.025	-0.025	-0.061	-0.063	-0.063
15	-0.026	-0.026	-0.026	-0.026	-0.025	-0.062	-0.064	-0.064

Продолжение Таблицы П4.  
Continuation of the Table A4.

$i/j$	9	10	11	12	13	14	15
1	-0.061	-0.061	-0.025	-0.024	-0.024	-0.026	-0.025
2	-0.063	-0.064	-0.025	-0.025	-0.026	-0.026	-0.026
3	-0.062	-0.064	-0.026	-0.025	-0.025	-0.026	-0.026
4	-0.061	-0.061	-0.025	-0.024	-0.025	-0.026	-0.026
5	-0.060	-0.060	-0.024	-0.024	-0.024	-0.025	0.025
6	-1.743	-12.485	-0.060	-0.058	-0.058	-0.061	-0.061
7	-1.743	-1.743	-0.062	-0.060	-0.061	-0.063	-0.064
8	-12.486	-1.743	-0.061	-0.059	-0.060	-0.063	-0.063
9	30.118	-12.486	-0.059	-0.057	-0.059	-0.061	-0.061
10	-12.486	30.119	-0.058	-0.056	-0.057	-0.059	-0.060
11	-0.059	-0.058	30.111	-12.496	-1.752	-1.752	-12.495
12	-0.058	-0.057	-12.496	30.109	-12.496	-1.752	-1.752
13	-0.058	-0.057	-1.752	-12.495	30.109	-12.496	-1.752
14	-0.060	-0.059	-1.751	-1.752	-12.496	30.110	-12.495
15	-0.061	-0.059	-12.495	-1.751	-1.752	-12.495	30.111