MATHEMATICAL MODEL OF THE «PISTON» DISPLACEMENT OF IMMISCIBLE LIQUIDS DURING FILTRATION IN A POROUS MEDIUM

Polozhaenko S. A., Lysenko N. A.
Odessa National Polytechnic University, Ukraine

Abstract. Mathematical model of the front displacement in porous media multicomponent systems, presents filterable immiscible (including abnormal) fluids. In real application tasks it is given a qualitative description of the process of displacement in a multicomponent system with an intermediate agent «piston». Mathematical model of a class of problems of the frontal displacement for multicomponent systems is formulated as a variational inequality and provides a simple numerical implementation.
Keywords: multicomponent systems, frontal expulsing, «stagnant zone», maximum gradient, mathematical model, variation inequality

MODELUL MATEMATIC DE DEPLASARE DE TIP ”PISTON” A LICHIDELOR NEMISCIBILE ÎN PROCESUL FILTRĂRII ÎNTR-UN MEDIU POROS

Polojaenco S. A., Lîsenco N. A.
Universitatea Naţională Politehnică din Odesa, Ucraina
Rezumat. Se propune model matematic de deplasare frontală în sistemele multicomponente în medii poroase. Mediile studiate sunt prezentate de către fluide, care nu se amestecă, sunt filtrante (și chiar, anormale). Într-o aplicație reală este prezentată o descriere calitativă a procesului de represiune într-un sistem multicomponent cu un agent intermediar - "piston". Un model matematic de o clasă de probleme frontale de deplasare pentru sistemele multicomponente este formulat ca o inegalitate variațională și oferă o implementare numerică simplă.
Cuvinte-cheie: sisteme multicomponente, depalsare frontală, «zone de depunere pe taiș», gradientul de limită, modelul mathematic, inegalitatea variațională.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ «ПОРШНЕВОГО» ВЫТЕСНЕНИЯ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Положаенко С. А., Лысенко Н. А.
Одесский национальный политехнический университет
Аннотация. Предложена математическая модель фронтального вытеснения в пористой среде многокомпонентных систем, представленных фильтрующимися несмешивающимися (в том числе аномальными) жидкостями. В условиях реальной прикладной задачи дано качественное описание процесса вытеснения в многокомпонентной системе с промежуточным агентом — «поршнем». Математическая модель класса задач фронтального вытеснения для многокомпонентных систем сформулирована в виде вариационного неравенства и обеспечивает простую численную реализацию.
Ключевые слова: Многокомпонентные системы, фронтальное вытеснение, «застойная зона», предельный градиент, математическая модель, вариационное неравенство.

Введение. Ряд технологических процессов, обусловленных фильтрационным движением в пористой среде, характеризуется явлением взаимофильтрации несмешивающихся жидкостей (или, как принято в специальной литературе [1 — 5] — многокомпонентных систем). Типичным примером такого технологического процесса может служить водонапорный режим разработки обедненных нефтяных месторождений [6]. При этом из-за особенностей структуры «скелета» пористой среды или физико-химических свойств (например, повышенного содержания парафинов) нефть может проявлять свойства аномальной жидкости, что находит отражение в наличии предельного градиента давления [7], а также нулевых скоростей фильтрации при ненулевом пластовом давлении [8]. В виду плохой смачиваемости водой «скелета» пористой среды часто наблюдается неудовлетворительный отмыв нефти и, как следствие, образование «застойных зон» — целиков неотфильтрованной нефти [6, 7]. Нивелировать данное явление позволяет использование промежуточного агента, т.е. жидкости с хорошими смачивающими свойствами (например, поверхностно-активных веществ — ПАВ), которая фильтруется между водой и нефтью, и представляет собой своеобразный «поршень», проталкивающий последнюю и препятствующий образованию неотфильтрованных целиков [9 — 11].

Предложенным к настоящему времени математическим моделям (ММ) «поршневого» вытеснения присуща значительная вычислительная сложность при реализации, что ограничивает их практическое применение. Кроме того, качественно новой, и не нашедшей ранее решения задачей, при изучении фильтрации в пористой среде многокомпонентных несмешивающихся жидкостей, является исследование устойчивости фронтального вытеснения. При этом под устойчивостью фронтального вытеснения в многокомпонентном потоке понимается [12] гладкость границы раздела диффундируемых компонент.

Предложим относительно простую в вычислительной реализации ММ «поршневого» вытеснения для многокомпонентных фильтрующихся систем, а также рассмотрим решение задачи устойчивости фронтального вытеснения. Будем предполагать, что некоторые из фильтрующихся компонент имеют аномальный характер, т. е. их диффузия характеризуется законом с предельным градиентом давления [12, 13]. Также покажем, что исследование гладкости границы раздела диффундирующих (фильтрующихся) компонент может быть использовано при решении задачи на образование «застойных зон».

Цель работы. Разработка класса математических моделей (ММ) процессов фильтрации многокомпонентных аномальных жидкостей на примере процесса вытеснения в многокомпонентной системе с промежуточным агентом — «поршнем».

Основная часть. Вначале выполним качественное описание процесса фильтрации многокомпонентных аномальных жидкостей при вытеснении одной жидкости другой, а затем разработаем ММ данного процесса в виде вариационного неравенства.

1. ***Качественное описание процесса вытеснения в многокомпонентной системе с промежуточным агентом — «поршнем»***. Условием, определяющим границу раздела диффундирующих компонент в случае совместной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей, может служить «скачек» насыщенности в функции Баклея-Леверетта [12, 14, 15]

$$J(S)=\frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1)+\mu_2 k_2^0(S_2)}, \qquad (1)$$

где $k_1^0(S_1)$ и $k_2^0(S_2)$ — относительные фазовые проницаемости для фильтрующихся жидкостей; μ_1 и μ_2 — их вязкости; S_1 и S_2 насыщенности порового пространства фильтрующимися жидкостями, соответственно.

«Скачек» насыщенности в (1) определяется соотношением $k_1^0(S_1)\equiv 0\ (S_1 \le S^*)$, вызываемым наличием у вытесняемой компоненты напряжения сдвига τ^*, где S^* и τ^* — соответственно предельные значения насыщенности и напряжения сдвига.

Экспериментально установлено [12], что фронт вытеснения продвигается устойчиво, если подвижность вытесняющей компоненты не превышает подвижность вытесняемой компоненты

$$\frac{k_1(S_1)}{\mu_1} \le \frac{k_2(S_2)}{\mu_2}. \qquad (2)$$

Деление (2) на скорость диффузии ϖ (в частном случае пластовых систем — скорости фильтрации) приводит к более общему и удобному виду

$$\frac{\partial P(t,z)}{\partial \eta} > 0, \quad \frac{\partial P_c(S)}{\partial \eta} > 0\,, \tag{3}$$

где $P(t,z)$ задает внутрипластовое (усредненное) давление для фильтрующихся жидкостей; $P_c(S)$ — капиллярное давление, обусловленное наличием различных скоростей фильтрации для жидкостей в многокомпонентной системе; η — нормаль к градиенту внутрипластового давления $P(t,z)$.

В противном случае скорость отмыва вытесняемой компоненты выше скорости изменения насыщенности вытесняющей компоненты, что приводит к образованию «застойных зон» [12, 13]. Иными словами, вытесняемая компонента «отступает» медленнее, чем продвигается вытесняющая компонента, что физически и определяет механизм образования «застойных зон».

Рассмотрим фронтальное вытеснение с предельным градиентом несмешивающихся компонент со «скачком» насыщенности на фронте вытеснения. Пусть за и перед фронтом вытеснения насыщенность вытесняющей компоненты S_2 имеет постоянные значения S_2^h и $S_2^f < S_2^h$ соответственно. А фронт вытеснения при этом перемещается в сторону положительного изменения градиента насыщенности с постоянной (для простоты рассмотрения) скоростью

$$\overline{\varpi} = \frac{\varpi}{m} \cdot \frac{J\left(S_2^h\right) - J\left(S_2^f\right)}{S_2^h - S_2^f}\,,$$

где ϖ — скорость фильтрации, обусловленная действием внутрипластового давления $P(t,z)$ (по закону Дарси [14, 15]); m — пористость среды, в которой происходит фильтрация.

Пусть также в момент времени $t = 0$ поверхность фронта вытеснения есть плоскость $F(z_i) = \Xi_0,\ i = 1,2$. Нарушение устойчивости фронтального вытеснения учтем в виде нестационарных возмущений, нарушающих постоянство насыщенностей в областях распространения фронта и искажающих его гладкость, что отразится следующим образом

$$F(z_i, t) = \Xi_0(t);\ i = 1,2\,, \tag{4}$$

где z_i — соответствуют координатам в невозмущенной плоскости фронта.

Известны [13] уравнения двухфазной фильтрации с предельным градиентом G, описывающие процесс фильтрации при отклонении от закона Дарси

$$\varpi_j = -\frac{k\lambda_j(S_j)}{\mu_j}\left[grad(P_j) - \frac{G_j}{\left|grad(P_j)\right|}grad(P_j)\right]; \quad \left|grad(P_j)\right| > G_j\,,$$
$$\varpi_j = 0\,; \quad \left|grad(P_j)\right| \le G_j\,; \quad j = 1,2\,, \tag{5}$$

а также уравнения неразрывности (случай двух фильтрующихся жидкостей)

$$div(\varpi_j)-(-1)^j m\frac{\partial S_j}{\partial t}=0\,; \quad j=1,2\,. \tag{6}$$

Уравнения вида (5) и (6) в предположении малости возмущений линеаризуются. Граничные условия (ГУ) на возмущенной поверхности фронта вытеснения (4), выражающие равенство давлений перед и за фронтом вытеснения, а также расходов

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \eta}=m\overline{\varpi}\left(S_1^h-S_1^f\right);\quad \frac{\partial Q_2}{\partial \eta}=m\overline{\varpi}\left(S_2^h-S_2^f\right)$$

определены на невозмущенной поверхности фронта вытеснения Ξ_0.

Для гладкости границы раздела потребуем ограниченность возмущений на поверхности Ξ_0. Тогда для определения возмущений скоростей, давлений и насыщенности получим следующие выражения (в приведенных ниже выражениях возмущения соответствующих величин обозначены знаком тильда, а невозмущенные величины обозначены индексом 0)

$$\varpi_j=-\frac{k\lambda_j(S_j)}{\mu_j}J_0(S_j)\left[grad\left(\tilde{P}_j\right)-\frac{G_j}{\left|grad\left(\tilde{P}_j\right)\right|}grad\left(\tilde{P}_j\right)\right];\quad \left|grad\left(\tilde{P}_j\right)\right|>G_j\,,$$

$$\varpi_j=0\,;\quad \left|grad\left(\tilde{P}_j\right)\right|\le G_j\,;\quad j=1,2\,, \tag{7}$$

с ГУ, учитывающими возмущения на поверхности фронта $F(z_i)=\Xi_0;\ i=1,2$

$$\frac{\partial\tilde{P}(t,z_i)}{\partial\eta}>0,\quad \frac{\partial\tilde{P}_c(S)}{\partial\eta}>0\,;\quad i=1,2\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\tilde{Q}_j}{\partial\eta}=m\overline{\varpi}\left(S_j^h-S_j^f\right);\quad j=1,2\,. \tag{9}$$

Следует обратить внимание, что выражения динамики (7) составлены из предположения совместного движения двух аномальных компонент. Таким образом, формулировка задачи об устойчивости фронтального вытеснения фактически сводится к определению возмущений насыщенности («скачку» насыщенности) из системы (7) с ГУ (8), (9).

Из практических приложений задачи на устойчивость фронтального вытеснения можно привести следующее. В нефтепромысловой практике часто используется вытеснение с применением промежуточного агента [12, 16 — 18], когда «поршень» из пены или полимера (которые являются хорошим вытеснителями) проталкиваются водой. При таком двойном «поршневом» вытеснении существуют два фронта вытеснения. В данном случае, если на границе «нефть — промежуточный агент» будет обеспечено условие устойчивости фронтального вытеснения (2) или (3), то тем самым будет обеспечена гладкость границы раздела диффундируемых компонент и, как следствие, маловероятно образование «застойных зон» в области, занятой нефтью. Последнее обстоятельство определяет повышение нефтеотдачи продуктивного пласта. При этом нет необходимости обеспечивать гладкость фронта вытеснения «промежуточный агент — вода» (т.е. возможен отмыв и образование «застойных зон» в области, занятой промежуточным агентом). Как и в случае двухкомпонентных смесей, возмущающими функциями здесь будут расходы в скважинах.

Физически картину «поршневого» вытеснения можно пояснить следующим образом. Равенство скоростей фильтрации (вытеснения) обеспечивается при равенстве вязкостей граничащих компонент. Иными словами, если для вязкостей вытесняемой нефти μ_1 и промежуточного агента μ_3 выполняется условие $\mu_1 \approx \mu_3$, то данные компоненты будут фильтроваться с одинаковой скоростью (т.е. выполняется условие (2)). Следовательно, закачка ограниченного количества промежуточного агента создает «поршень», который на границе «нефть — промежуточный агент» создает равные условия фильтрации для обоих компонентов. Тем самым, обеспечивается гладкость границы их раздела, и, как следствие — отсутствие «застойных зон».

2. ***Формализация задачи фронтального «поршневого» вытеснения для многокомпонентных смесей в виде вариационного неравенства***. Сформулируем ММ процесса «поршневого» вытеснения. Запишем для плоского случая ($i=2$) уравнения динамики вида (5) и (7) соответственно для вытесняемой компоненты (индекс 1 у переменных), вытесняющей компоненты (индекс 2 у переменных) и промежуточного агента — «поршня» (индекс 3 у переменных) с учетом «скачка» насыщенности в функции Баклея-Леверетта (опуская для простоты записи параметры у функций)

$$-\frac{m\partial S_1}{\partial t}-\frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)[1-S_1G_1]\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_1}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j Q_j, \tag{10}$$

$$-\frac{m\partial S_2}{\partial t}-\frac{k_2\rho_2}{\mu_2}J(S_2)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_2}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j Q_j, \tag{11}$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}-\frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)[1-S_3G_3]\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_3}\right]\right\}=0\,. \tag{12}$$

Начальные и граничные условия примут вид

$$S_l(0,z)=S_{l_0}(z),\quad l=\overline{1,3}\,, \tag{13}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta}>0,\quad \frac{\partial P_c(S_3)}{\partial \eta}>0\,. \tag{14}$$

Граничные условия (14) определены только для интересующей границы Γ «вытесняемая компонента — промежуточный агент», поскольку для нее предполагается определение устойчивости фронтального вытеснения (т.е. отсутствие образования «застойных зон»). При этом продвижение «поршня» в виде промежуточного агента будем фиксировать по скачку насыщенности $S_3(t,z)$ в функции Баклея-Леверетта. Переменные, входящие в выражения (10) — (14) описаны ранее.

Как отмечалось выше, фильтрующиеся жидкости в многокомпонентной системе могут проявлять аномальный характер. Адекватной формой учета «аномальности» фильтрующихся жидкостей (т.е. отклонение от линейного закона Дарси) является формализация задачи в вариационной постановке [10, 11, 13]. Тогда, для приведения исследуемой задачи к вариационной форме (вариационному неравенству) введем в рассмотрение пробную функцию v, по физической природе аналогичную функциям насыщенности $S_i(t,z)(i=1,3)$, и определенную на множестве K: $\forall v\in K, K=\{v|\, v\geq 0$ п.в. в $\Omega\}$. Скалярно умножим (10) и (12) соответственно на $(v-S_1)$ и $(v-S_3)$. Далее, применив, к преобразованным таким образом выражениям (10), (12) функцию Грина, получим

$$-\frac{m\partial S_1}{\partial t}(v-S_1)-\int_{\Omega}\frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\{[1-S_1G_1]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\cdot\frac{\partial(v-S_1)}{\partial z_i}-\right.$$

$$-\frac{dP_c}{dS_1}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_1)}{\partial z_i}\Bigg]\Bigg\}dz=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j Q_j+\int_\Gamma\left[\frac{\partial S_1}{\partial\eta}\cdot(v-S_1)\right]d\Gamma,\quad\forall v,\,S_1\in K\,,\tag{15}$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega\frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\Big\{[1-S_3G_3]\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}-$$

$$-\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\Bigg]\Bigg\}dz=\int_\Gamma\left[\frac{\partial S_3}{\partial\eta}\cdot(v-S_3)\right]d\Gamma,\quad\forall v,\,S_3\in K\,.\tag{16}$$

Выполняя в (15), (16) замену переменной v на $(-v)$ запишем новую систему с учетом уравнения (11) для вытесняющей компоненты

$$-\frac{m\partial S_1}{\partial t}(v-S_1)-\int_\Omega\frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\left\{[1-S_1G_1]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_1}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_1)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_\Omega\frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\left\{[1-S_1G_1]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega\frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_1)\left\{[1-S_1G_1]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_1|\right]\right\}dz\ge$$

$$\ge\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j Q_{1_j}\quad\forall v,\,S_1\in K\,,\tag{17}$$

$$-\frac{m\partial S_2}{\partial t}-\frac{k_2\rho_2}{\mu_2}J(S_2)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_2}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j Q_{2_j}\tag{18}$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega\frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_\Omega\frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega\frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz\ge$$

$$\ge 0\quad\forall v,\,S_3\in K\,.\tag{19}$$

Выражения (17) — (19) дополняются начальными (13) и граничными (14) условиями. Таким образом, (17) — (19), (13), (14) представляет собой ММ «поршневого» вытеснения для многокомпонентной системы.

На каждой из границ «вытесняющая компонента — промежуточный агент» и «промежуточный агент — вытесняемая компонента» выполняются соответственно очевидные условия $S_2=(1-S_3)$ и $S_1=(1-S_3)$. С учетом данных соотношений выражения (17) — (19) сводится к виду

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega\frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_3)\left\{S_3G_1\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_\Omega\frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_3)\left\{S_3G_1\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega\frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_3)\left\{S_3G_1\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz\ge$$

$$\ge\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j Q_j\quad\forall v,S_1\in K\,,\tag{20}$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}-\frac{k_2\rho_2}{\mu_2}J(S_3)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_3}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j Q_j,\tag{21}$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega\frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_{\Omega}\frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_{\Omega}\frac{k_3\rho_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz\geq$$
$$\geq 0 \quad \forall v,\, S_1\in K. \qquad (22)$$

Вариационные уравнения (20) — (22) описывают динамику многокомпонентной системы и, в совокупности с начальными (13) и граничными (14) условиями, представляют собой ММ процесса вытеснения с промежуточным «агентом».

Вывод. Предложены математические модели задачи «поршневого» вытеснения при фильтрационном движении несмешивающихся жидкостей для случаев как идеальных жидкостей (подчиняющихся линейному закону Дарси), так и аномальных жидкостей (т.е. нарушающих линейный закон Дарси). Численная реализация указанных математических моделей осложнена необходимостью решения системы из трех дифференциальных уравнений (или неравенств — в случае аномальных жидкостей). При этом показана возможность упрощения исходной задачи (на примере вариационной постановки) путем сведения ее к двум более простым задачам, которые можно решать последовательно, что значительно облегчает численную реализацию.

Литература

[1] Saez A. The effective homogeneous behavior of heterogeneous porous media / A. Saez, C. J. Otero, I. Rusinek // Transport in porous media. — 1989, № 4. — P. 212 — 238.
[2] Tretheway D. Effects of absolute pressure and dissolved gases on apparent fluid slip in hydrophobic microchannels / D. Tretheway, S. Stone, C. Meinhart // Bulleten of American Physical Society. — 2004. — V. 49. — P. 215 — 223.
[3] Barrat J. L. Large slip effect at a nonwetting fluid-solid interface / J. L. Barrat, L. Bocquet // Physical Review Letters. — 1999. — V. 82. — P. 4671 — 4674.
[4] Tretheway D. Apparent fluid slip at hydrophobic microchannel walls / D. Tretheway, C. Meinhart // Physics of Fluids. — 2002. — V. 14. — P. 9 — 12.
[5] Tretheway D. Analysis of slip flow in microchannels / D. Tretheway , X. lui, C. Meinhart D. // Proceedings of 11th International Symposium “Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics”, 8 — 11 July 2002, Lisbon, Portugal.
[6] Quintard M. Two phase flow in heterogeneous porous media: the method of large-scale averaging / M. Quintard, S. Whitaker // Transport in porous media. — 1988, № 3. — P. 357 — 413.
[7] Muller R. J. Threshold gradient for water flow in clay systems. — Soil Sci. Soc. Ann. Proc., 1963, V. 27, P. 605 — 609.
[8] Enevoldsen J. Pressure Drop Through Gravel Packs / J. Enevoldsen, H. K. Rasmusen, A. Seasen // Annual Transactions of the Nordic Rheology Society. — 1995. — V. 3. — P. 45 — 47.
[9] Chauveteau G. Rodlike Polymer Solution Flow Through Fines Pores: Influence of Pore Size on Rheological Behavior // Journal of the Rheology. — 1982. — V. 26(2). — P. 111 — 142.
[10] Mauersberger P. A varitional principle for steady groundwater flow with a free surface. — Pure and Appl. Geophysics, 1965, V. 60. P. 101 — 106.
[11] Mauersberger P. The use of varitional methods and of error distribution principles in groundwater hydraulics. — Bull. Int. Ass. Sci. Hydrology, June, 1968, V. 13, № 2. — P. 169.
[12] Bernadiner M. G. Gidrodinamicheskaia teoria filtratsii anomalinih jidkostei / M. G. Bernadiner, V.M. Entov. — M.: Nauka, 1975. — 199 s. (in Russian)

[13] Verlani A. F. Matematicheskoe modelirovanie anomalinyh diffuzionnyh protsessov / A. F. Verlani, S. A. Polojaenko, N. G. Serbov. — К.: Naukova dumka, 2011. — 416 s. (in Russian)
[14] Aziz X. Matematicheskoe modelirovanie plastovyh sistem / X. Aziz, E. Settari. — M.: Nedra, 1982. — 406 s. (in Russian)
[15] Crichlow Ghenry B. Sovremennaia razrabotka nefteanyh mestorojdenii. — M.: Nedra, 1979. — 302 s. (in Russian)
[16] Ahmetov i. M. Primenenie kompozitnyh sistem v tehnologhicheskih operatsiah ekspluatatsii skvajin / I. M. Ahmetov, N. M. Sherstnev. — M.: Nedra, 1989. — 213 s. (in Russian)
[17] Melik-Aslanov L. S. Nefteotdacha pri vytesnenii nefti iz plasta vodoi — Баку: Azerneshr, 1989. — 108 s. (in Russian)
[18] Vahitov G. G. Osobennosti vytesnenia vodoi nefti s veazkouprughimi svoistvami / G. G. Vahitov, A. X. Mirzadjanzade, V. M. Ryjik // Nefteanoe hozeaistvo. — 1977, Nr. 4. — s. 38 — 41. (in Russian)

Сведения об авторах.

Положаенко Сергей Анатольевич, Одесский Национальный политехнический университет, заведующий кафедрой «Компьютеризированные системы автоматики» доктор технических наук, профессор. Область научных интересов: математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами.
E-mail: polozhaenko@mail.ru

Лысенко Наталья Алексеевна, Одесский Национальный политехнический университет, аспирант. Область научных интересов: математическое моделирование и управление технологическими процессами.
E-mail: rosenrotta@gmail.com